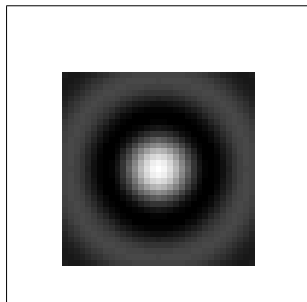
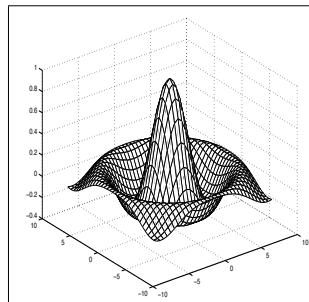


Traitement du signal bidimensionnel et des images

Notes de cours

Fabrice HEITZ

Septembre 2014



Traitement du signal bidimensionnel et des images

Contenu du cours

Mots-Clefs : théorie du signal et des systèmes multi-dimensionnels, transformée de Fourier 2D, filtrage numérique de l'image, ondelettes et représentations multirésolutions.

Description

La théorie du signal et des systèmes multi-dimensionnels joue désormais un rôle fondamental dans l'analyse des systèmes modernes de traitement optique ou numérique de l'information. Ce cours présente un point de vue unifié sur le sujet, en traitant conjointement des signaux et systèmes continus ou discrets dans un formalisme et des notations unifiés. L'accent est mis en particulier sur le traitement numérique du signal bidimensionnel (2D) que constitue l'image.

On rappelle tout d'abord les représentations mathématiques des signaux physiques continus et discrets : fonctions, distributions et séries numériques multi-dimensionnelles. Les différentes représentations de l'image analogique et numérique sont présentées. L'analyse harmonique des signaux bidimensionnels est traitée dans une seconde partie, dans laquelle la transformée de Fourier 2D est introduite et illustrée sur des exemples en imagerie. Dans une troisième partie, on présente les principes de l'analyse des systèmes linéaires (filtres) bidimensionnels. Les liens entre signaux continus et signaux discrets sont établis dans une quatrième partie consacrée à la numérisation des signaux 2D. La cinquième partie de ce cours est une introduction au filtrage numérique des images. Y sont en particulier exposées les techniques de spécification, de synthèse et d'implantation des filtres bidimensionnels classiquement utilisés en traitement des images. La dernière partie introduit la transformée en ondelettes et les représentations multirésolutions.

Plan du cours - Traitement du signal 2D

- (I). Représentation mathématique des signaux physiques 2D
 - (I-1) Les différentes classes de signaux
 - (I-2) Représentation des signaux 2D déterministes analogiques : fonctions et distributions 2D
 - (I-3) Représentation des signaux 2D déterministes numériques : séries numériques 2D
 - (I-4) Représentations des signaux 2D aléatoires : champs aléatoires
- (II). Spectres des signaux 2D et des images
 - (II-1) Transformée de Fourier des signaux 2D analogiques
 - (II-2) Interprétation du spectre d'une image analogique
 - (II-3) Transformée de Fourier des signaux 2D numériques
 - (II-4) Interprétation du spectre d'une image numérique
 - (II-5) Corrélation et "template matching"
 - (II-6) Densité spectrale de puissance des images aléatoires
- (III). Systèmes multidimensionnels de traitement du signal
 - (III-1) Représentation des systèmes physiques
 - (III-2) Réponse impulsionnelle des systèmes linéaires stationnaires
 - (III-3) Réponse en fréquence des systèmes linéaires stationnaires, filtrage des signaux 2D déterministes et aléatoires
 - (III-4) Exemples de systèmes linéaires (filtres) en traitement d'image
 - (III-5) Application I : détection des contours
 - (III-6) Application II : restauration des images
- (IV). Numérisation des signaux 2D et des images
 - (IV-1) Échantillonnage idéal, théorème de Shannon
 - (IV-2) Considérations pratiques sur l'échantillonnage des images
 - (IV-3) Reconstruction du signal 2D par interpolation
 - (IV-4) Quantification
- (V). Filtrage numérique des images
 - (V-1) La transformée de Fourier discrète
 - (V-2) Implantations des filtres numériques : domaine spatial et domaine de Fourier
 - (V-3) Éléments sur la synthèse des filtres numériques 2D
- (VI). Ondelettes et représentations multirésolutions
 - (VI-1) Limitations de la Transformée de Fourier
 - (VI-2) Transformée de Fourier à court terme
 - (VI-3) Transformée en ondelettes continue
 - (VI-4) Série d'ondelettes
 - (VI-5) Approximations multirésolutions
 - (VI-6) Applications

Bibliographie

- Ouvrages généraux : traitement du signal et de l'image
 - ▷ R. BRACEWELL, *Two-dimensional imaging*, Prentice Hall, 1995.
 - ▷ K.R. CASTLEMAN, *Digital Image Processing*, Prentice Hall, 1996.
 - ▷ J.-P. COCQUEREZ et S. PHILIPP, *Analyse d'images : filtrage et segmentation*, Masson, Paris, 1995.
 - ▷ D.E. DUDGEON, R.M. MERSEREAU, *Multidimensional Digital Signal Processing*, Prentice Hall, 1984.
 - ▷ M. FRANCON, *Optique : formation et traitement des images*, Masson, 1972.
 - ▷ J.D. GASKILL, *Linear Systems, Fourier Transforms and Optics*, John Wiley and Sons, 1978.
 - ▷ R. GONZALEZ, R. WOODS, *Digital Image Processing*, Addison Wesley, 1992.
 - ▷ A.K. JAIN, *Fundamentals of Digital Image Processing*, Prentice Hall, 1989.
 - ▷ J.S. LIM, *Two-Dimensional Signal and Image Processing*, Prentice Hall, 1990.
 - ▷ W.K. PRATT, *Digital Image Processing*, Wiley Interscience, 1991.
 - ▷ A. MARION, *Acquisition et visualisation des images*, Eyrolles, 1997.
 - ▷ J. MAX (et col.), *Méthodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques. Tome 2 : appareillages, méthodes nouvelles et exemples d'applications*, Masson, 1987.
 - ▷ J. RUSS, *The Image Processing Handbook*, CRC Press, Springer, IEEE Press, 1999.
- Ouvrages plus spécialisés, en relation avec le traitement du signal 2D
 - ▷ S. MALLAT, *Wavelet Tour of Signal Processing*, Academic Press, 3rd edition, 2008.
 - ▷ M. VETTERLI and J. KOVACEVIC, *Wavelets and subband coding*, Prentice Hall, 1995.
 - ▷ H. ANDREWS and B. HUNT, *Digital Image Restoration*, Prentice Hall, 1977.
 - ▷ M. BERTERO and P. BOCCACCI, *Introduction to Inverse Problems in Imaging*, IOP Publishing, 1998.

Sites internet

Cours en ligne

- **HIPR2** : free www-based set of tutorial materials for the 50 most commonly used image processing operators. It contains tutorial text, sample results and JAVA demonstrations of individual operators and collections.
<http://www.dai.ed.ac.uk/HIPR2/>
- **A Numerical Tour of Signal Processing (NTSP)** : by Gabriel Peyré. NTSP gathers Matlab experiments to explore modern signal and image processing. The tours are complemented by slides of courses that concentrate on the theory of signal and image processing.
<https://www.ceremade.dauphine.fr/~peyre/numerical-tour>
- **CVonline: The Evolving, Distributed, Non-Proprietary, On-Line Compendium of Computer Vision** :
<http://www.dai.ed.ac.uk/CVonline/>
- **Vision Systems**
http://www.cs.cf.ac.uk/Dave/Vision_lecture/Vision_lecture_caller.html

Bases de données et de ressources

- **Image Processing On Line : IPOL** is a research journal of image processing and image analysis. Each article contains a text describing an algorithm and source code, with an online demonstration facility and an archive of online experiments.
<http://www.ipol.im>
- **efg's Image Processing Page**
<http://www.efg2.com/Lab/index.html>
- **Computer Vision Home Page** : nombreuses informations sur la vision par ordinateur, FAQs, images de test, démonstrations, forums de discussion, etc.
<http://www.cs.cmu.edu/~cil/vision.html>
- **Informations sur les ondelettes** :
http://cas.ensmp.fr/~chaplais/wavetour_presentation/Wavetour_presentation_US.html
- **Vision par ordinateur, traitement des images** : base annotée
<http://iris.usc.edu/Vision-Notes/bibliography/contents.html>
- **FAQ sur la couleur**
<http://www.poynton.com/ColorFAQ.html>

INTRODUCTION

Traitement du signal multidimensionnel

- Signal : fonction d'une ou plusieurs variables qui véhicule de l'information sur un phénomène physique. Le signal est lui-même porté par une grandeur physique (électrique, acoustique, lumineuse).
- Système (de traitement du signal) : transforme les signaux en d'autres signaux ou en paramètres, dans le but d'en extraire les composantes essentielles portant l'information.
- De nombreux signaux physiques sont fonctions de plusieurs variables (d'espace, de temps, de fréquence, etc.) : signaux multidimensionnels (N-D).
- Le traitement des signaux multidimensionnels intervient dans de nombreux systèmes modernes de traitement de l'information (en télécommunications, aéronautique, génie bio-médical, traitement des images, vision artificielle, traitement de la parole, sismologie, etc.).

Signaux bidimensionnels (images)

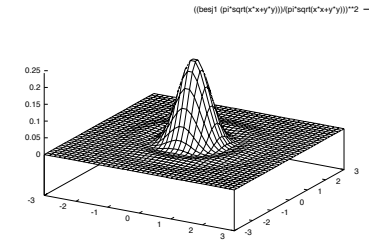


Image d'une source ponctuelle
par un système optique

- Images : signaux dépendant de deux variables (spatiales, fréquentielles, spatio-temporelles, etc.) = signaux bidimensionnels (2D).
- Le traitement d'images est une science fortement pluridisciplinaire qui s'appuie sur :
 - ▷ les mathématiques théoriques et appliquées ;
 - ▷ le traitement du signal 2D (déterministe, aléatoire) ;
 - ▷ la physique (optique, ...) ;
 - ▷ l'informatique, l'intelligence artificielle ;
 - ▷ l'automatique, la robotique ;
 - ▷ l'électronique et les capteurs.

	Finalités d'un système de TS 2D
--	--

- Analyse = extraire les composantes essentielles portant l'information.
- Synthèse = création d'un signal 2D (image) à partir de signaux élémentaires et d'un modèle mathématique.
- Codage, compression = mise en forme du signal image et réduction de la redondance d'information pour une transmission ou un stockage (normes JPEG, MPEG, H261, etc.)
- Mesure = estimation d'une grandeur caractéristique avec une certaine confiance.
- Filtrage = élimination des composantes indésirables (bruit, etc.).
- Amélioration d'image : traitement visant à améliorer la qualité visuelle d'une image.
- Restauration : inversion d'un système ayant dégradé l'image pour retrouver l'image originale.
- Détection de contours.
- Segmentation : partition d'une image en régions (but : extraire les objets d'intérêt).
- Reconnaissance des formes.

PARTIE I

REPRÉSENTATION MATHÉMATIQUE DES SIGNAUX PHYSIQUES 2D

I-1

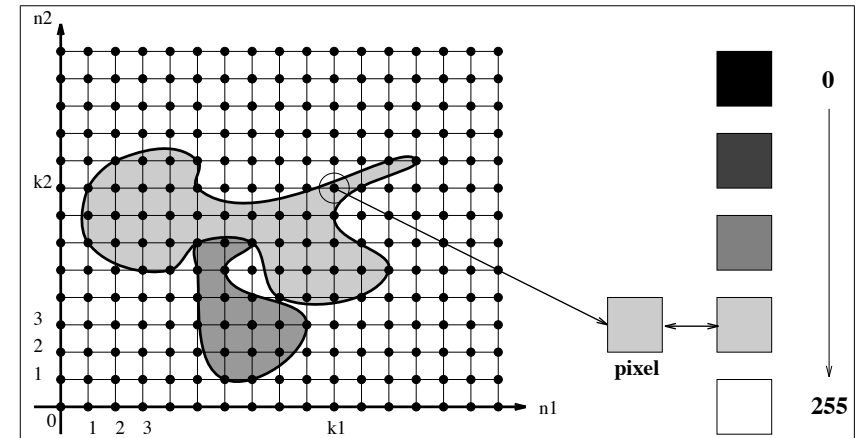
Image analogique - image numérique



- Image : signal bidimensionnel
- Image analogique $f(x, y)$:
 - ▷ amplitude f (“niveau de gris”) continue,
 - ▷ variables d’espace continues $x, y \in \mathbb{R}$
 - ▷ images obtenue par un système optique, images photographiques, etc.
- Image numérique $x(n_1, n_2)$:
 - ▷ amplitude x (“niveau de gris”) discrète,
 - ▷ variables d’espace discrètes $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$
 - ▷ souvent obtenue par échantillonnage et quantification d’une image analogique pour stockage et traitement informatique.

I-1

L’image numérique monochrome



La discrétisation d’un signal 2D continu $f(x, y)$ passe par :

- une discrétisation des variables d’espace :
 $(x, y) \Rightarrow (n_1, n_2)$: échantillonnage (spatial)
- une discrétisation des amplitudes f : quantification des valeurs (de niveaux de gris). En général sur 8 bits = 256 valeurs.

I-1

Image monochrome - image couleur

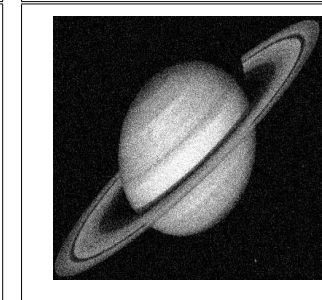
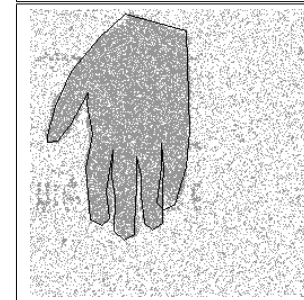
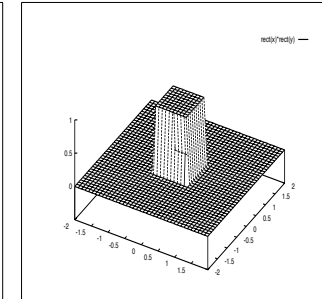
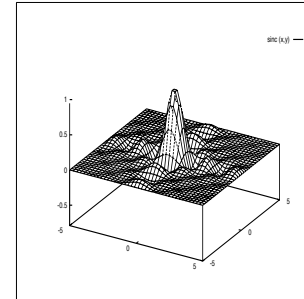


- Image monochrome (en niveaux de gris) : amplitude = scalaire : 1 pixel sur 8 bits
- Image couleur : amplitude = vecteur :
 - ▷ 3 composantes : codage RVB (synthèse additive : écran) sur $3 \times 8 = 24$ bits (16M couleurs);
 - ▷ 3 composantes + 1 (transparence) : codage RVB + (A=alpha-channel) sur $4 \times 8 = 32$ bits ;
 - ▷ 3 composantes : codage TSL (teinte, saturation, luminance) sur $3 \times 8 = 24$ bits. TSL \leftrightarrow RVB
 - ▷ 3 composantes + 1 : codage CMJN (synthèse soustractive : imprimerie) sur $4 \times 8 = 32$ bits
- Formats d'image : stockage + compression

Format	Compression / pertes	Nb couleurs	Poids
BMP	non sans pertes	16M	+++
PNG	oui sans pertes	16M palette : 2 à 256	++
TIFF	oui avec ou sans pertes	16M	++
JPEG	oui avec (ou sans) pertes	16M	-
JPEG2000	oui avec (ou sans) pertes	> 16M	--
GIF	oui sans pertes	palette : 2 à 256	---

I-1

Représentations mathématiques

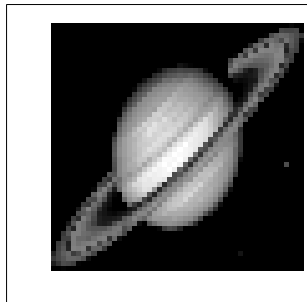
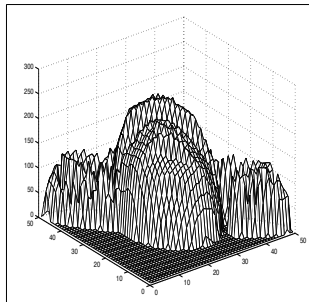
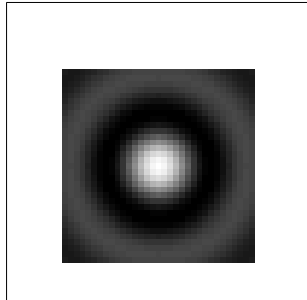
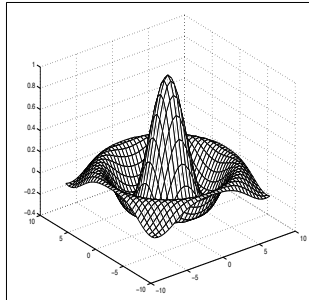


Des représentations différentes en fonction de la nature du signal 2D :

Nature du signal		Représentation mathématique
déterministe	espace continu espace discret	fonctions 2D, distributions 2D suites numériques 2D
aléatoire	espace continu espace discret	champs aléatoires suites aléatoires 2D

I-2

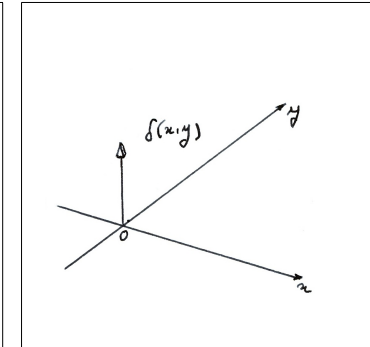
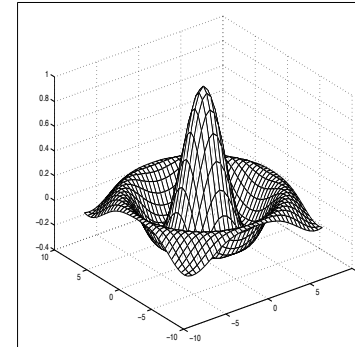
Visualisation des images



Deux modes de représentation : surfacique ou en intensité
(niveaux de gris, couleur)

I-2

Représentation des images analogiques



- Fonctions à deux variables.
- Distributions bidimensionnelles : outils mathématiques commodes pour représenter certains signaux (sources “ponctuelles”, etc.)

- **Fonction :** $f(x, y)$, $x, y \in \mathbb{R}$,
 $f(x, y) \in \mathbb{R}$ ou $f(x, y) \in \mathbb{C}$

- **Propriétés utiles:**

- ▷ continuité, dérivabilité ;
- ▷ support borné (ou non) ;
- ▷ intégrabilité :

$$f \in L_1 \text{ si } \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x, y)| dx dy < +\infty$$

$$f \in L_2 \text{ si } \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x, y)|^2 dx dy < +\infty$$

L_1 et L_2 : espaces vectoriels normés.

- ▷ symétrie :

$$\text{fonction paire : } f(x, y) = f(-x, -y)$$

$$\text{fonction impaire : } f(x, y) = -f(-x, -y)$$

- ▷ changement de variable dans l'intégration

$$\int \int_{\mathcal{R}} f(x, y) dx dy = \int \int_{\mathcal{G}} f(g(u, v), h(u, v)) |J(u, v)| du dv$$

où \mathcal{R} est l'image de \mathcal{G} par la transformation :

$$x = g(u, v)$$

$$y = h(u, v)$$

et :

$$J(u, v) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}$$

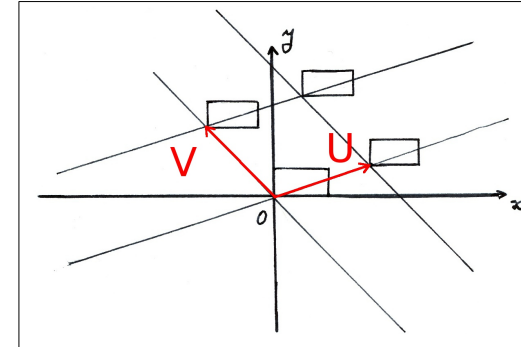
est le jacobien de la transformation.

- ▷ **Séparabilité.** $f(x, y)$ est une fonction séparable si :

$$\exists g \text{ et } h \text{ tel que } f(x, y) = g(x)h(y)$$

La séparabilité est une propriété dépendant du système de coordonnées !

- ▷ **Propriété de périodicité**



$f(x, y)$ est périodique, de période $\vec{U} \times \vec{V}$

(avec $\vec{U} \begin{vmatrix} U_x \\ U_y \end{vmatrix}$, $\vec{V} \begin{vmatrix} V_x \\ V_y \end{vmatrix}$) si :

$$f(x, y) = f(x + U_x, y + U_y) = f(x + V_x, y + V_y)$$

Périodicité rectangulaire :

$$f(x, y) = f(x + T_x, y) = f(x, y + T_y)$$

(dans ce cas : $\vec{U} \begin{vmatrix} T_x \\ 0 \end{vmatrix}$, $\vec{V} \begin{vmatrix} 0 \\ T_y \end{vmatrix}$)

Périodes fondamentales : les plus petites valeurs de T_x et T_y vérifiant la propriété précédente.

- Fonction porte 2D

$$\text{rect}(x, y) = \text{rect}(x) \text{rect}(y)$$

avec :

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } |x| > \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{pour } |x| = \frac{1}{2} \\ 1 & \text{pour } |x| < \frac{1}{2} \end{cases}$$

- Fonction triangulaire

$$\text{tri}(x, y) = \text{tri}(x) \text{tri}(y)$$

avec :

$$\text{tri}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } |x| \geq 1 \\ 1 - |x| & \text{pour } |x| < 1 \end{cases}$$

- Fonction “disque” (en coord. polaires)

$$\text{disq}(r) = \begin{cases} 0 & \text{pour } r \geq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{pour } r < \frac{1}{2} \end{cases}$$

- Fonction sinus cardinal 2D

$$\text{sinc}(x, y) = \text{sinc}(x) \text{sinc}(y)$$

avec :

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$$

- Fonction sombrero (en coord. polaires)

$$\text{somb}(r) = 2 \frac{J_1(\pi r)}{\pi r}$$

où J_1 est la fonction de Bessel de première espèce.

- Fonction gaussienne 2D

$$\text{Gaus}(x, y) = \text{Gaus}(x) \text{Gaus}(y)$$

avec :

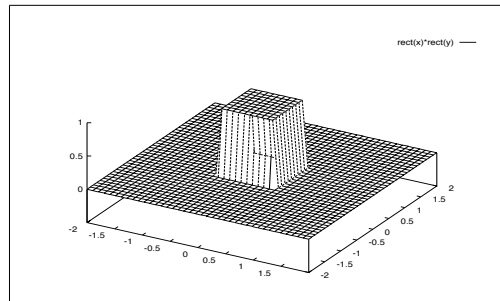
$$\text{Gaus}(x) = \exp(-\pi x^2)$$

- Fonctions exponentielles complexes

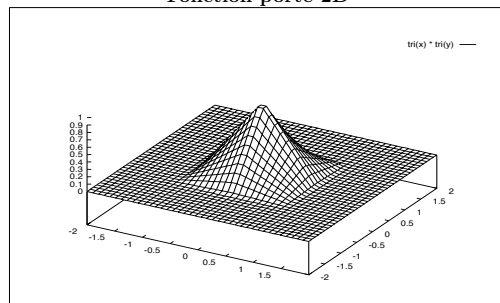
$$\begin{aligned} f(x, y) &= A \exp(j2\pi(\nu_x x + \nu_y y)) \\ &= A (\cos 2\pi(\nu_x x + \nu_y y) + j \sin 2\pi(\nu_x x + \nu_y y)) \end{aligned}$$

C'est un signal périodique de période fondamentale :

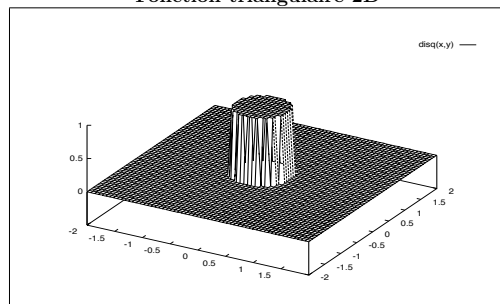
$$T_x = \frac{1}{\nu_x}, \quad T_y = \frac{1}{\nu_y}$$



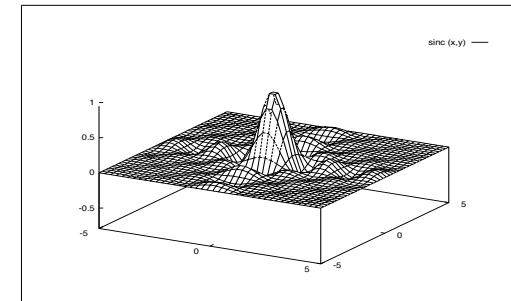
Fonction porte 2D



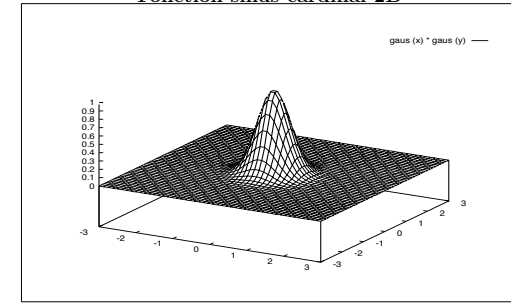
Fonction triangulaire 2D



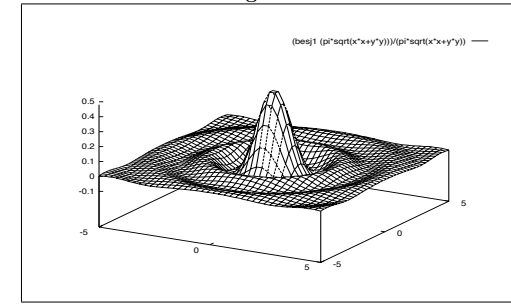
Fonction disque



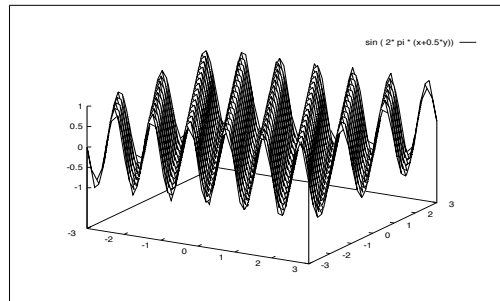
Fonction sinus cardinal 2D



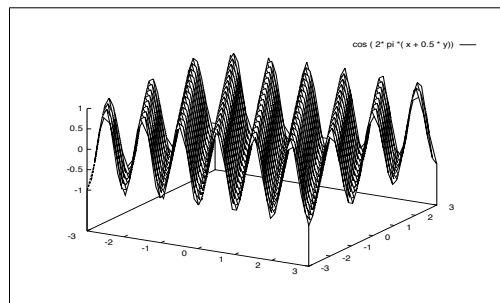
Fonction gaussienne 2D



Fonction sombrero (fonction de Bessel de 1ère espèce)



Fonction sinus 2D



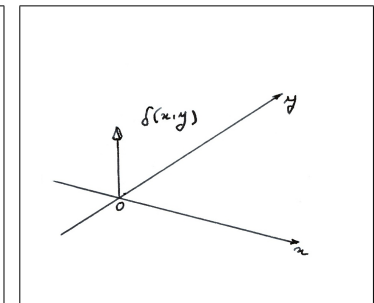
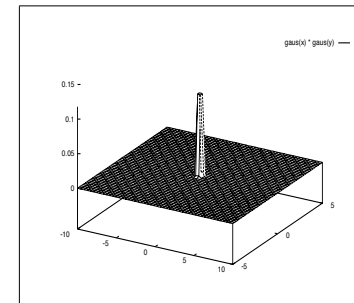
Fonction cosinus 2D

I-2

La distribution de Dirac 2D

(« pic de Dirac », « impulsion de Dirac »)

- Représentation :



- Définition:

$$\delta(x - x_0, y - y_0) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0)$$

- Propriété caractéristique :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \delta(x - x_0, y - y_0) dx dy = f(x_0, y_0)$$

pour $f(x, y)$ continue en $(x, y) = (x_0, y_0)$.

- Autres propriétés :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x, y) dx dy = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \delta(x, y) dx dy = f(0, 0)$$

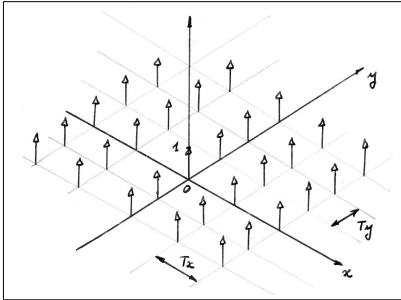
$$f(x, y) \delta(x, y) = f(0, 0) \delta(x, y)$$

$$f(x, y) \delta(x - x_0, y - y_0) = f(x_0, y_0) \delta(x - x_0, y - y_0)$$

$$f(x, y) * \delta(x - x_0, y - y_0) = f(x - x_0, y - y_0)$$

- Utilisation : description de sources ponctuelles en optique, etc.

- Représentation graphique :



- Définition :

$$\begin{aligned}\text{III}_{T_x, T_y}(x, y) &= \text{III}_{T_x}(x) \text{III}_{T_y}(y) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(x - kT_x, y - lT_y)\end{aligned}$$

- Propriétés :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{III}_{T_x, T_y}(x, y) f(x, y) dx dy = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} f(kT_x, lT_y)$$

$$\begin{aligned}f(x, y) * \text{III}_{T_x, T_y}(x, y) &= f(x, y) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(x - kT_x, y - lT_y) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} f(x - kT_x, y - lT_y)\end{aligned}$$

- Utilisation : essentiellement dans les opérations d'échantillonnage (échantillonnage idéalisé d'une image par un peigne de Dirac 2D).

- Signal lame : $\delta(y - mx - c)$

- ▷ Lame selon Ox : $f(x, y) = \delta(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x', y) dx'$
- ▷ volume par unité de longueur = $\int_{x=0}^{x=1} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y) dx dy = 1$
- ▷ volume total : $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y) dx dy = +\infty$

- ▷ Lame selon Oy : $f(x, y) = \delta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x, y - y') dy'$
- ▷ volume par unité de longueur = 1
- ▷ volume total = $+\infty$

- ▷ Cas général : $f(x, y) = \delta(y - mx - c)$
- ▷ volume par unité de longueur : $(1 + m^2)^{-1/2}$

- ▷ Utilisation : fente lumineuse, mire = lames parallèles périodiques.

- Anneau impulsif : $\delta(r - R)$

- ▷ volume par unité de longueur = 1
- ▷ volume total : $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(r - R) dx dy = 2\pi R$

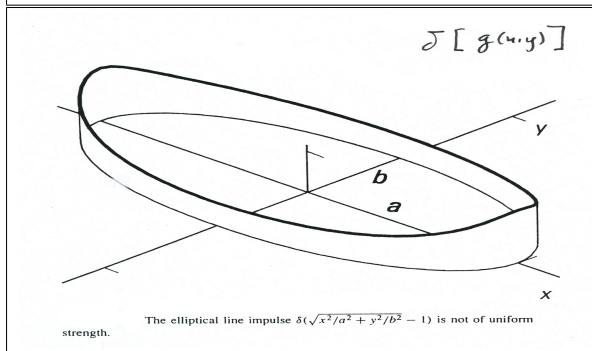
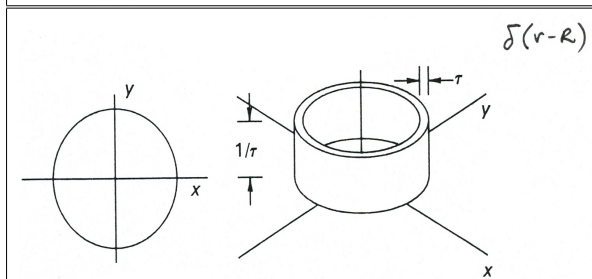
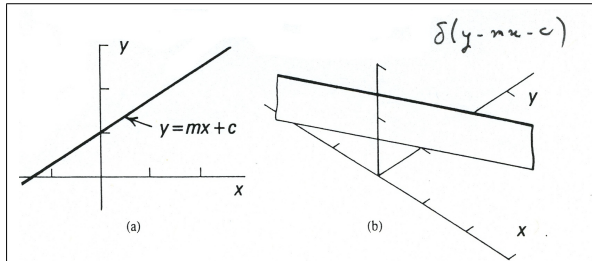
- Cas général : $\delta[g(x, y)]$

- ▷ concentré sur la courbe définie par $g(x, y) = 0$
- ▷ volume par unité de longueur = $\frac{1}{\|\nabla g\|_{g(x, y)=0}}$

Compléments : [R. Bracewell, *Two-Dimensional Imaging*, Prentice Hall, 1995, chap. 3]

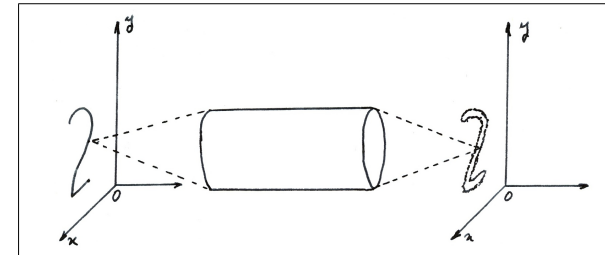
I-2

Autres distributions en 2D



I-2

Produit de convolution (fonctions)



De nombreux systèmes physiques peuvent être représentés par des opérateurs de convolution.

Le produit de convolution $g(x, y)$ de deux fonctions $f(x, y)$ et $h(x, y)$ localement sommables est défini par :

$$g(x, y) = f(x, y) * h(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha, \beta) h(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta$$

• Propriétés :

▷ commutativité

$$f(x, y) * h(x, y) = h(x, y) * f(x, y)$$

soit :

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha, \beta) h(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - \alpha, y - \beta) h(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \end{aligned}$$

▷ distributivité

$$\begin{aligned} & f(x, y) * (h_1(x, y) + h_2(x, y)) \\ &= f(x, y) * h_1(x, y) + f(x, y) * h_2(x, y) \end{aligned}$$

I-2

Produit de convolution (distributions)

La notion de produit de convolution s'étend aux distributions. On retiendra les résultats suivants :

- Convolution avec une impulsion de Dirac = translation

$$f(x, y) * \delta(x - x_0, y - y_0) = f(x - x_0, y - y_0)$$

en particulier :

$$f(x, y) * \delta(x, y) = f(x, y)$$

La distribution de Dirac à l'origine est donc l'élément unité pour le produit de convolution.

- Convolution avec un peigne de Dirac = périodisation

$$\begin{aligned} f(x, y) * \text{III}_{T_x T_y}(x, y) \\ &= f(x, y) * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(x - kT_x, y - lT_y) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} f(x - kT_x, y - lT_y) \end{aligned}$$

I-2

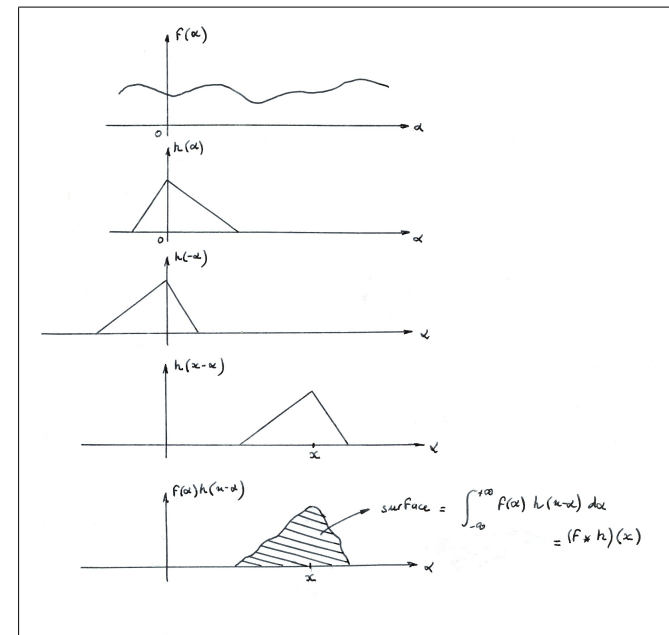
Produit de convolution : interprétation

La convolution de $f(x)$ par $h(x)$:

$$f(x) * h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha)h(x - \alpha)d\alpha$$

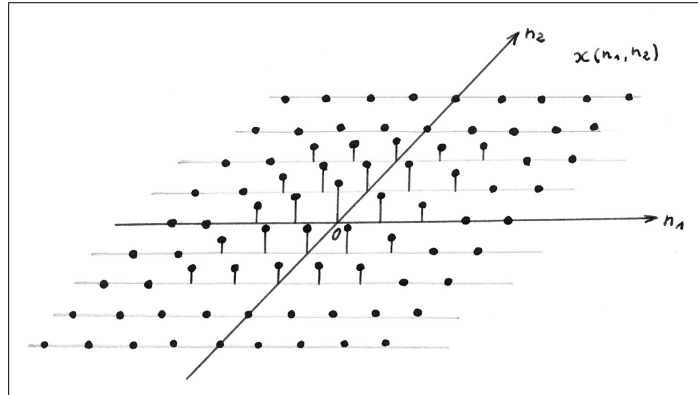
peut se décomposer en :

- un retournement $h(\alpha) \rightarrow h(-\alpha)$
- une translation $h(-\alpha) \rightarrow h(-\alpha + x) = h(x - \alpha)$
- une multiplication $f(\alpha)h(x - \alpha)$
- une intégration : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha)h(x - \alpha)d\alpha$



I-3

Représentation des images numériques



- Suites numériques bidimensionnelles

Elles sont utilisées pour représenter les signaux 2D à variables d'espace discrètes :

$$x = \{x(n_1, n_2), -\infty < n_1, n_2 < +\infty\}$$

- ▷ Un élément particulier de la suite x , noté $x(n_1, n_2)$ est appelé un échantillon.
- ▷ $x(n_1, n_2) \in \mathbb{R}$ ou $x(n_1, n_2) \in \mathbb{C}$.
- ▷ $x(n_1, n_2)$ n'est pas défini pour des valeurs non entières des variables n_1 et n_2 .
- ▷ on note indifféremment : x ou $x(n_1, n_2)$ pour la suite.

I-3

Propriétés utiles des suites numériques

- support borné ou non ;

- séparabilité :

$$x(n_1, n_2) = x_1(n_1) x_2(n_2)$$

- convergence :

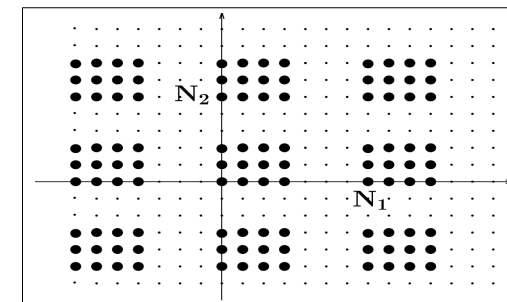
$$\sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{+\infty} x(n_1, n_2) \text{ existe ?}$$

- série convergente en valeur absolue :

$$\sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{+\infty} |x(n_1, n_2)| < \infty$$

- série convergente en carré :

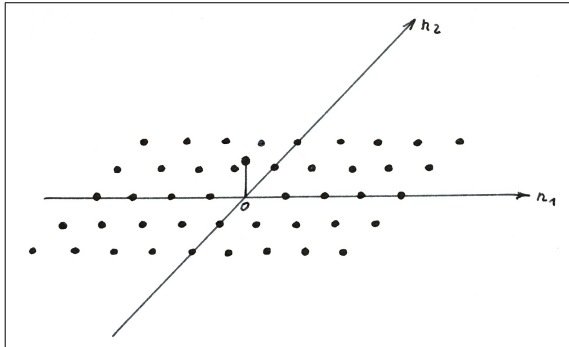
$$\sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{+\infty} |x(n_1, n_2)|^2 < \infty$$



- périodicité : voir les fonctions (périodicité rectangulaire, périodes entières)

I-3

Suites numériques élémentaires



- L'impulsion unité 2D

$$\delta(n_1, n_2) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n_1 = n_2 = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

A NE PAS CONFONDRE AVEC L'IMPULSION DE DIRAC !

- Suites exponentielles complexes

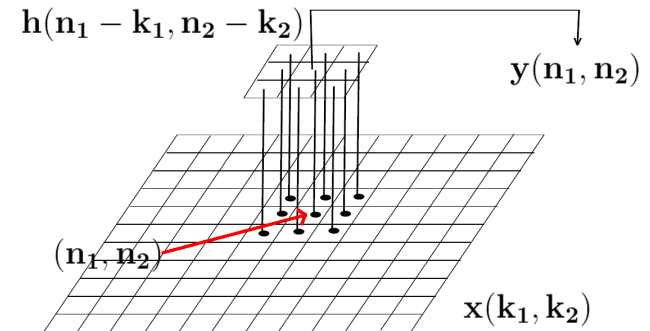
$$\begin{aligned} x(n_1, n_2) &= A e^{j2\pi(\nu_1 n_1 + \nu_2 n_2)} \\ &= A \cos 2\pi(\nu_1 n_1 + \nu_2 n_2) + j A \sin 2\pi(\nu_1 n_1 + \nu_2 n_2) \end{aligned}$$

$$\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{R}$$

Attention : cette suite n'est pas nécessairement périodique.

I-3

Produit de convolution (suites numériques)



De nombreux systèmes discrets peuvent être représentés par des opérateurs de convolution.

Le produit de convolution $y(n_1, n_2)$ de deux suites numériques $x(n_1, n_2)$ et $h(n_1, n_2)$ sommables est défini par :

$$\begin{aligned} y(n_1, n_2) &= x(n_1, n_2) * h(n_1, n_2) \\ &= \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} x(k_1, k_2) h(n_1 - k_1, n_2 - k_2) \end{aligned}$$

- Propriétés :

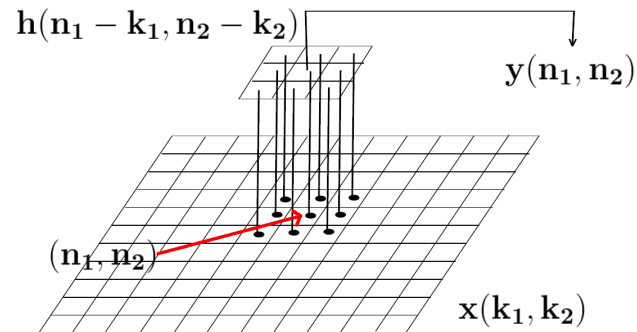
▷ commutativité

$$\begin{aligned} &x(n_1, n_2) * h(n_1, n_2) \\ &= h(n_1, n_2) * x(n_1, n_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{soit : } &\sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} x(k_1, k_2) h(n_1 - k_1, n_2 - k_2) \\ &= \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} x(n_1 - k_1, n_2 - k_2) h(k_1, k_2) \end{aligned}$$

I-3

Autres propriétés



On retiendra les résultats suivants :

- distributivité

$$x(n_1, n_2) * (h_1(n_1, n_2) + h_2(n_1, n_2)) \\ = x(n_1, n_2) * h_1(n_1, n_2) + x(n_1, n_2) * h_2(n_1, n_2)$$

- convolution avec une impulsion unité = translation

$$x(n_1, n_2) * \delta(n_1 - k_1, n_2 - k_2) = x(n_1 - k_1, n_2 - k_2)$$

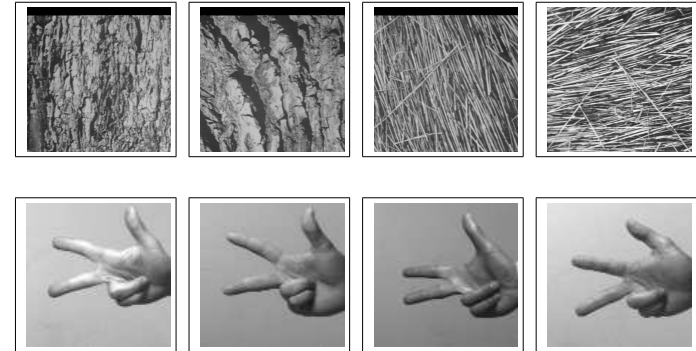
en particulier :

$$x(n_1, n_2) * \delta(n_1, n_2) = x(n_1, n_2)$$

L'impulsion unité est donc l'élément unité pour le produit de convolution.

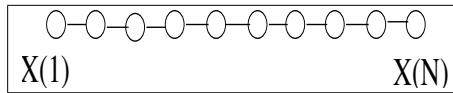
I-4

Signaux 2D aléatoires, champs aléatoires

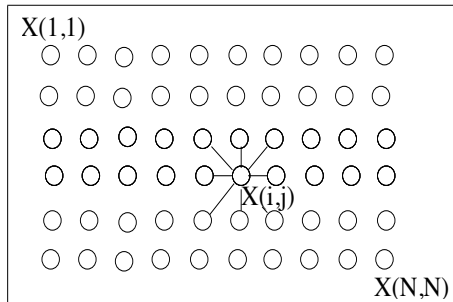


© Brodatz, Dover Pub. 1966 et LSIIT 1998

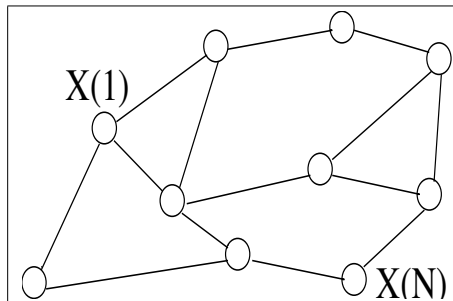
- Signal 2D aléatoire = ensemble infini de signaux déterministes différents correspondant à des « réalisations » du signal.
- Images analogiques : champ aléatoire $F(x, y, \omega) =$ fonction aléatoire des variables d'espace qui :
 - ▷ à une épreuve ω fait correspondre une image analogique déterministe (réalisation du champ) : $f(x, y, \omega)$;
 - ▷ à chaque position (x, y) fait correspondre une variable aléatoire (v.a.) (fonction de ω) : $F(x, y, \omega)$.
- Images numériques : champ aléatoire $X(n_1, n_2, \omega) =$ suite aléatoire qui :
 - ▷ à une épreuve ω fait correspondre une image numérique déterministe (réalisation du champ) : $x(n_1, n_2, \omega)$;
 - ▷ à chaque position (x, y) fait correspondre une variable aléatoire (v.a.) (fonction de ω) : $X(n_1, n_2, \omega)$.



Processus aléatoire 1D



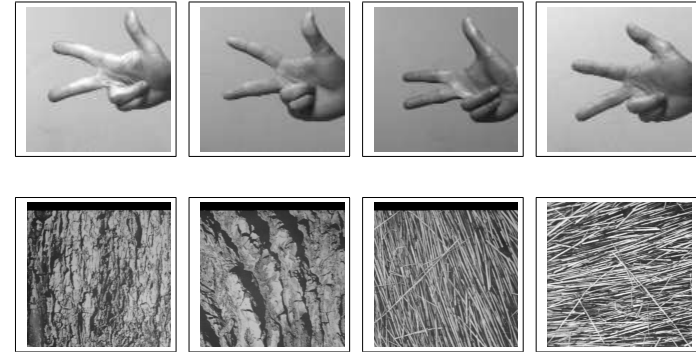
Champ aléatoire 2D



Champ aléatoire sur un graphe

I-4

Champs aléatoires : caractéristiques



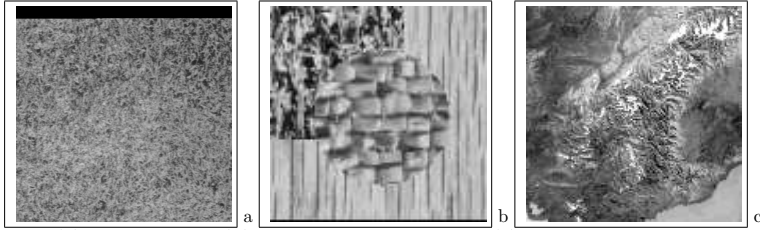
On considère un champ aléatoire $X(n_1, n_2, \omega)$ qui sera noté $X(n_1, n_2)$, de réalisations $x(n_1, n_2)$ (cas discret, réel).

- Cas général (non stationnaire) :

- ▷ Moyenne : $m_X(n_1, n_2) = \mathbb{E}[X(n_1, n_2)]$
- ▷ Variance : $\sigma_X^2(n_1, n_2) = \mathbb{E}[(X(n_1, n_2) - \mathbb{E}(X(n_1, n_2)))^2]$
- ▷ Fonction d'autocorrélation :
 $R_X(l_1, l_2; m_1, m_2) = \mathbb{E}[X(l_1, l_2)X(m_1, m_2)]$

- Cas stationnaire :

- ▷ Moyenne : $m_X = \mathbb{E}[X(n_1, n_2)]$
- ▷ Variance : $\sigma_X^2 = \mathbb{E}[(X(n_1, n_2) - \mathbb{E}(X(n_1, n_2)))^2]$
- ▷ Fonction d'autocorrélation :
 $R_X(n_1, n_2) = \mathbb{E}[X(k_1, k_2)X(k_1 - n_1, k_2 - n_2)]$
 $R_X(n_1, n_2) = R_X(-n_1, -n_2)$



(a) stationnaire, (b) stationnaire par plage, (c) non stationnaire

© Brodatz, Dover Pub. 1966

- Cas stationnaire + ergodique

▷ Moyenne :

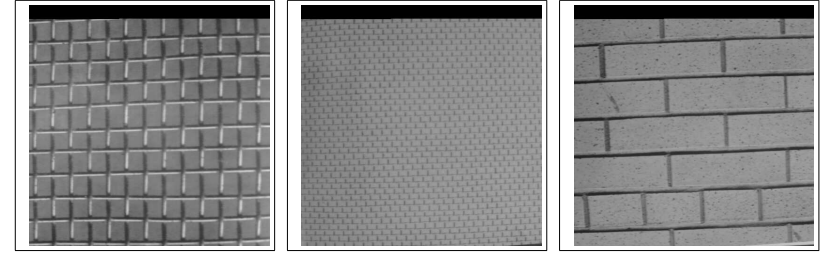
$$\begin{aligned} m_X &= \mathbb{E}[X(n_1, n_2)] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{n_1=-N}^N \sum_{n_2=-N}^N x(n_1, n_2) \end{aligned}$$

▷ Variance :

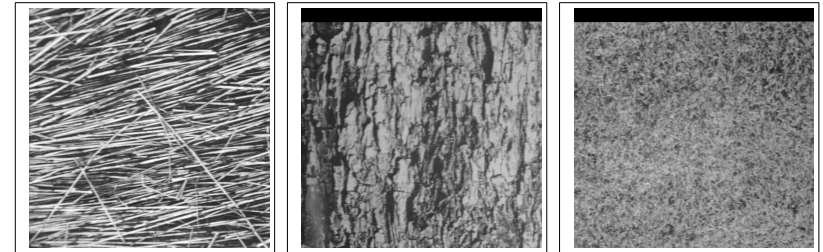
$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= \mathbb{E}[(X(n_1, n_2) - \mathbb{E}(X(n_1, n_2)))^2] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{n_1=-N}^N \sum_{n_2=-N}^N (x(n_1, n_2) - m_X)^2 \end{aligned}$$

▷ Fonction d'autocorrélation :

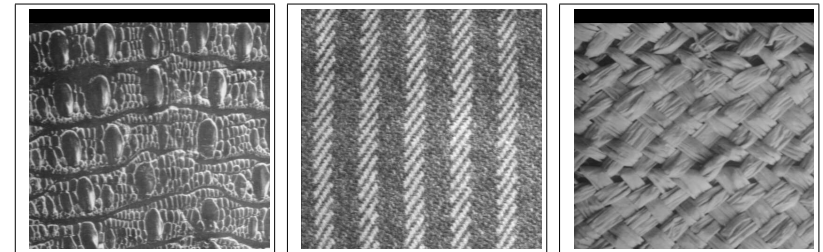
$$\begin{aligned} R_X(n_1, n_2) &= \mathbb{E}[X(k_1, k_2)X(k_1 - n_1, k_2 - n_2)] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{k_1=-N}^N \sum_{k_2=-N}^N x(k_1, k_2)x(k_1 - n_1, k_2 - n_2) \end{aligned}$$



Textures déterministes

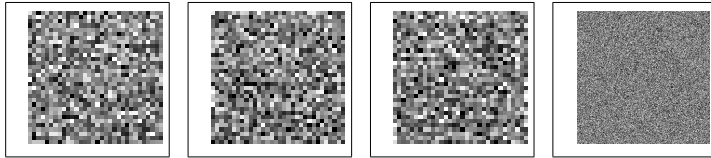


Textures aléatoires



Textures à composantes déterministes et aléatoires

© Brodatz, Dover Pub. 1966



Le bruit blanc 2D est un signal aléatoire très utilisé comme modèle simple de bruit. Il est caractérisé par une décorrélation complète entre échantillons situés en des points différents (décorrélation spatiale). Sa d.s.p. est constante (la puissance se répartit de façon uniforme sur l'ensemble des fréquences).

- Le bruit blanc discret 2D

C'est une image aléatoire $X(n_1, n_2)$ caractérisée par :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X(n_1, n_2)] &= 0 \\ R_X(n_1, n_2) &= \sigma^2 \delta(n_1, n_2) \\ S_X(\nu_1, \nu_2) &= \sigma^2\end{aligned}$$

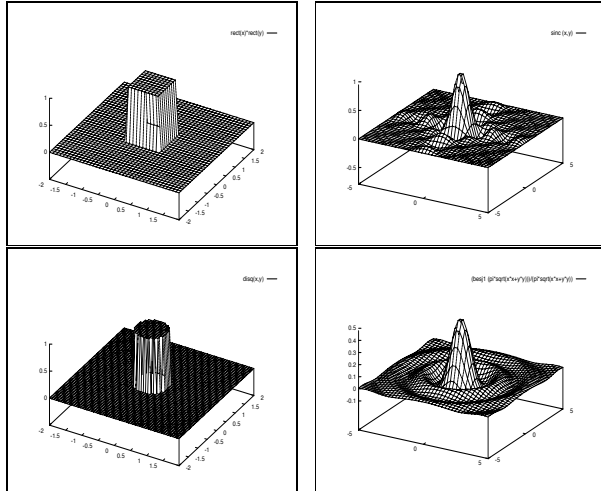
où $\delta(n_1, n_2)$ est l'impulsion unité.

PARTIE II

SPECTRES DES SIGNAUX 2D ET DES IMAGES

II

Analyse harmonique



$$\begin{aligned} f(x, y) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\nu_x, \nu_y) \\ x(n_1, n_2) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\nu_1, \nu_2) \quad \nu_1, \nu_2 \in \mathbb{R}! \end{aligned}$$

• Deux représentations du même signal 2D :

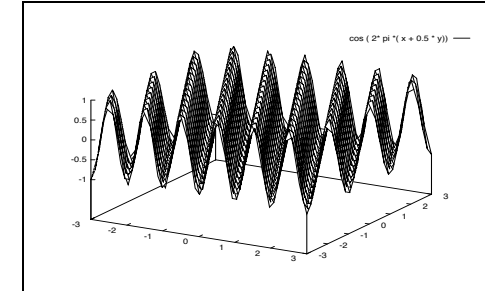
- ▷ représentation spatiale : $f(x, y)$ ($x(n_1, n_2)$);
- ▷ représentation fréquentielle : $F(\nu_x, \nu_y)$ ($X(\nu_1, \nu_2)$).

- $F(\nu_x, \nu_y)$ (resp. $X(\nu_1, \nu_2)$) est la transformée de Fourier (T.F.) 2D de $f(x, y)$ (resp. $x(n_1, n_2)$).

- Principe de la transformée de Fourier : décomposition du signal sur une base de fonctions exponentielles de fréquences variables.

II-1

Série de Fourier 2D : cas continu



Soit $f(x, y)$ un signal 2D périodique de périodes fondamentales T_{xo}, T_{yo} ($\nu_{xo} = \frac{1}{T_{xo}}, \nu_{yo} = \frac{1}{T_{yo}}$).

• Décomposition en série de Fourier :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_{kl} e^{j2\pi(k\nu_{xo}x + l\nu_{yo}y)} \\ \text{avec : } a_{kl} &= \frac{1}{T_{xo}T_{yo}} \int_{T_{xo}} \int_{T_{yo}} f(x, y) e^{-j2\pi(k\nu_{xo}x + l\nu_{yo}y)} dx dy \end{aligned}$$

- ▷ $k = l = 0$: a_{00} est la «composante continue» (valeur moyenne du signal 2D sur une période).
- ▷ $a_{kl} e^{j2\pi(k\nu_{xo}x + l\nu_{yo}y)}$ est l'harmonique d'ordre k, l .

II-1	La transformée de Fourier 2D : cas continu
------	--

Tout signal 2D $f(x, y)$ vérifiant certaines conditions (voir plus loin) admet une décomposition de Fourier :

$$F(\nu_x, \nu_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(\nu_x x + \nu_y y)} dx dy$$

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu_x, \nu_y) e^{j2\pi(\nu_x x + \nu_y y)} d\nu_x d\nu_y$$

- $f(x, y)$ = somme d'exponentielles complexes de fréquences ν_x, ν_y et d'amplitudes $F(\nu_x, \nu_y) d\nu_x d\nu_y$.

- $F(\nu_x, \nu_y)$: transformée de Fourier de $f(x, y)$ ou «spectre de $f(x, y)$ ».

- Notations :

$$f(x, y) \xleftrightarrow{F} F(\nu_x, \nu_y)$$

$$F(\nu_x, \nu_y) = \mathcal{F}[f(x, y)]$$

$$f(x, y) = \mathcal{F}^{-1}[F(\nu_x, \nu_y)]$$

- Spectres d'amplitude et de phase :

$$F(\nu_x, \nu_y) = |F(\nu_x, \nu_y)| e^{j \text{Arg}[F(\nu_x, \nu_y)]}$$

$$|F(\nu_x, \nu_y)| : \text{spectre d'amplitude}$$

$$\text{Arg}[F(\nu_x, \nu_y)] : \text{spectre de phase}$$

II-1	La transformée de Fourier 2D
------	------------------------------

- $F(0, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy$ est la «composante continue» du signal, $F(\nu_x, \nu_y)$ est la «composante fréquentielle» aux fréquences ν_x, ν_y .

- La transformée de Fourier des signaux 2D analogiques peut s'obtenir par voie optique (diffraction de Fraunhofer en optique cohérente).

- D'autres définitions sont parfois utilisées pour la TF (variables ω_x, ω_y):

$$F(\omega_x, \omega_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-j(\omega_x x + \omega_y y)} dx dy$$

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega_x, \omega_y) e^{j(\omega_x x + \omega_y y)} d\omega_x d\omega_y$$

- Exemples de T.F :

▷ Fonction porte 2D

$$f(x, y) = \text{rect}(x, y)$$

$$F(\nu_x, \nu_y) = \text{sinc}(\nu_x, \nu_y)$$

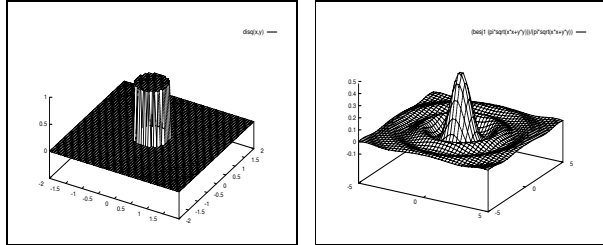
▷ Gaussienne 2D

$$f(x, y) = e^{-\pi(x^2 + y^2)}$$

$$F(\nu_x, \nu_y) = e^{-\pi(\nu_x^2 + \nu_y^2)}$$

II-1

Cas des fonctions à symétrie circulaire



Les systèmes optiques peuvent être utilisés pour le calcul de la T.F. 2D. Ces systèmes présentent souvent une symétrie circulaire (lentilles, ...).

La T.F. 2D des fonctions à symétrie circulaire est également à symétrie circulaire. Elle se calcule en coordonnées polaires en utilisant la transformée de Hankel.

- $f(x, y)$: fonction à symétrie circulaire.

Coord. polaires en (x, y) :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan \frac{y}{x} \end{cases}$$

$f(x, y)$ peut se mettre sous la forme :

$$f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2}) = g(r)$$

- Sa T.F. 2D s'écrit :

$$\begin{aligned} F(\nu_x, \nu_y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(\nu_x x + \nu_y y)} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\sqrt{x^2 + y^2}) e^{-j2\pi(\nu_x x + \nu_y y)} dx dy \end{aligned}$$

Coord. polaires en (ν_x, ν_y) :

$$\begin{cases} \nu_x = \rho \cos \phi \\ \nu_y = \rho \sin \phi \end{cases} \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{\nu_x^2 + \nu_y^2} \\ \phi = \arctan \frac{\nu_y}{\nu_x} \end{cases}$$

Il vient :

$$\begin{aligned} F(\rho \cos \phi, \rho \sin \phi) &= \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} g(r) e^{-j2\pi r \rho \cos(\theta - \phi)} r dr d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{+\infty} g(r) J_0(2\pi r \rho) r dr \\ &\triangleq G(\rho) \quad (\text{à symétrie circulaire}) \end{aligned}$$

où J_0 est la fonction de Bessel d'ordre 0 et de première espèce :

$$J_0(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ju \cos(\theta - \phi)} d\theta$$

qui ne dépend pas de ϕ .

- La transformée de Hankel se définit comme :

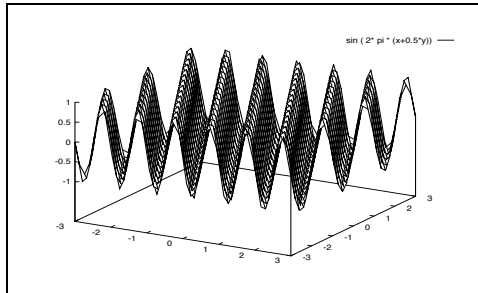
$$\begin{aligned} G(\rho) &= 2\pi \int_0^{+\infty} g(r) J_0(2\pi r \rho) r dr \\ g(r) &= 2\pi \int_0^{+\infty} G(\rho) J_0(2\pi r \rho) \rho d\rho \end{aligned}$$

- Exemple : transformée de Fourier du disque de rayon $\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{disq}(r) &\longleftrightarrow \frac{\pi}{4} \text{somb}(\rho) = \frac{J_1(\pi \rho)}{2\rho} \\ \text{somb}(r) &\longleftrightarrow \frac{4}{\pi} \text{disq}(\rho) \end{aligned}$$

II-1

Convergence de la transformée de Fourier



Toutes les fonctions 2D n'admettent pas une transformée de Fourier !

- Signaux pour lesquels la transformée converge :

- ▷ les signaux de carré intégrable (énergie finie):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x, y)|^2 dx dy < +\infty$$

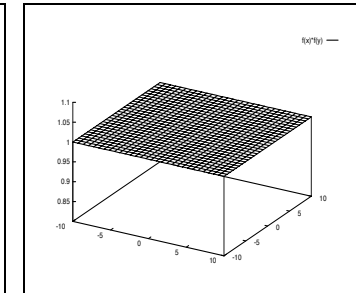
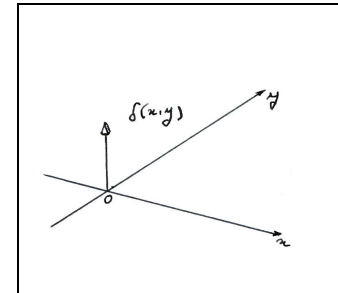
- ▷ les signaux vérifiant les “conditions de Dirichlet”

- Conséquence : de nombreux signaux 2D n'admettent pas de TF au sens des fonctions :

- ▷ $f(x, y) = 1$;
 - ▷ les signaux 2D périodiques ;
 - ▷ les distributions singulières (impulsion de Dirac, etc.)

II-1

Transformée de Fourier des distributions



On est amené à étendre la TF aux distributions. Ceci permet en particulier de traiter le cas des signaux périodiques.

- TF de l'impulsion de Dirac :

$$\delta(x - x_0, y - y_0) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j2\pi(\nu_x x_0 + \nu_y y_0)}$$

- TF de l'exp. complexe :

$$\begin{aligned} e^{-j2\pi(\nu_{xo}x + \nu_{yo}y)} &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} \delta(\nu_x + \nu_{xo}, \nu_y + \nu_{yo}) \\ e^{j2\pi(\nu_{xo}x + \nu_{yo}y)} &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} \delta(\nu_x - \nu_{xo}, \nu_y - \nu_{yo}) \end{aligned}$$

- En particulier:

$$\begin{aligned} \delta(x, y) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} 1 \\ 1 &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} \delta(\nu_x, \nu_y) \\ \delta(x) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} \delta(\nu_y) \\ \delta(y) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} \delta(\nu_x) \end{aligned}$$

II-1	Transformée de Fourier des distributions
------	--

- Signaux sinusoïdaux :

$$\begin{aligned} & \cos 2\pi(\nu_{xo}x + \nu_{yo}y) \\ \xleftrightarrow{\mathcal{F}} & \frac{1}{2} [\delta(\nu_x - \nu_{xo}, \nu_y - \nu_{yo}) + \delta(\nu_x + \nu_{xo}, \nu_y + \nu_{yo})] \\ & \sin 2\pi(\nu_{xo}x + \nu_{yo}y) \\ \xleftrightarrow{\mathcal{F}} & \frac{1}{2j} [\delta(\nu_x - \nu_{xo}, \nu_y - \nu_{yo}) - \delta(\nu_x + \nu_{xo}, \nu_y + \nu_{yo})] \end{aligned}$$

- Peigne de Dirac :

$$\begin{aligned} & \text{III}_{T_{xo}, T_{yo}}(x, y) \\ = & \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(x - kT_{xo}, y - lT_{yo}) \\ \xleftrightarrow{\mathcal{F}} & \frac{1}{T_{xo}T_{yo}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(\nu_x - \frac{k}{T_{xo}}, \nu_y - \frac{l}{T_{yo}}) \end{aligned}$$

II-1	Transformée de Fourier des signaux périodiques
------	--

Un signal périodique $f(x, y)$ n'est pas de carré intégrable et n'a donc pas de TF au sens des fonctions. Il admet toutefois une TF au sens des distributions. Cette TF est une somme pondérée de distributions de Dirac (spectre de raies).

- Soit $f(x, y)$ périodique (périodes $T_{xo} = \frac{1}{\nu_{xo}}$, $T_{yo} = \frac{1}{\nu_{yo}}$).
- Décomposition en série de Fourier de $f(x, y)$:

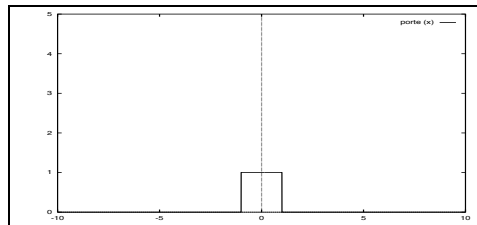
$$f(x, y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_{kl} e^{j2\pi(k\nu_{xo}x + l\nu_{yo}y)}$$

- Transformée de Fourier de $f(x, y)$:

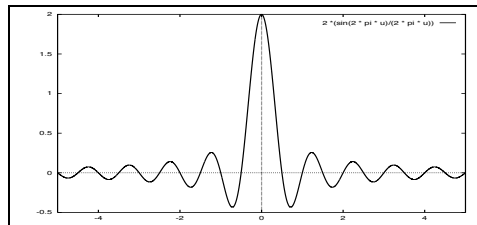
$$\begin{aligned} f(x, y) & \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\nu_x, \nu_y) \\ F(\nu_x, \nu_y) & = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_{kl} \delta(\nu_x - k\nu_{xo}, \nu_y - l\nu_{yo}) \end{aligned}$$

- Exemples :

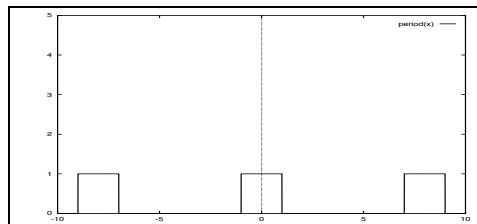
- ▷ signal sinusoïdal
- ▷ peigne de Dirac



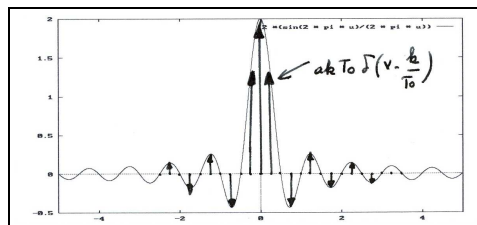
Fonction porte 1D



T.F. de la fonction porte 1D



Fonction porte 1D périodisée



T.F. de la fonction porte 1D périodisée

II-1

Transformée de Fourier : propriétés

$$F(\nu_x, \nu_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(\nu_x x + \nu_y y)} dx dy$$

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu_x, \nu_y) e^{j2\pi(\nu_x x + \nu_y y)} d\nu_x d\nu_y$$

• Linéarité

$$\text{si } f_1(x, y) \xleftrightarrow{F} F_1(\nu_x, \nu_y)$$

$$f_2(x, y) \xleftrightarrow{F} F_2(\nu_x, \nu_y)$$

$$\text{alors } af_1(x, y) + bf_2(x, y) \xleftrightarrow{F} aF_1(\nu_x, \nu_y) + bF_2(\nu_x, \nu_y)$$

• Symétrie

▷ si $f(x, y)$ est réel :

$$F(-\nu_x, -\nu_y) = F^*(\nu_x, \nu_y)$$

$$|F(-\nu_x, -\nu_y)| = |F(\nu_x, \nu_y)|$$

$$\text{Arg } F(-\nu_x, -\nu_y) = -\text{Arg } F(\nu_x, \nu_y)$$

• Dérivation

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} f(x, y) \xleftrightarrow{F} (2\pi j \nu_x)^k (2\pi j \nu_y)^l F(\nu_x, \nu_y)$$

II-1

Transformée de Fourier : propriétés

$$F(\nu_x, \nu_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(\nu_x x + \nu_y y)} dx dy$$

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu_x, \nu_y) e^{j2\pi(\nu_x x + \nu_y y)} d\nu_x d\nu_y$$

• Cas des fonctions séparables

$$\begin{aligned} \text{si } f_1(x) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} F_1(\nu) \\ \text{si } f_2(y) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} F_2(\nu) \\ f(x, y) = f_1(x) f_2(y) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\nu_x, \nu_y) = F_1(\nu_x) F_2(\nu_y) \end{aligned}$$

• Translation et facteurs d'échelle

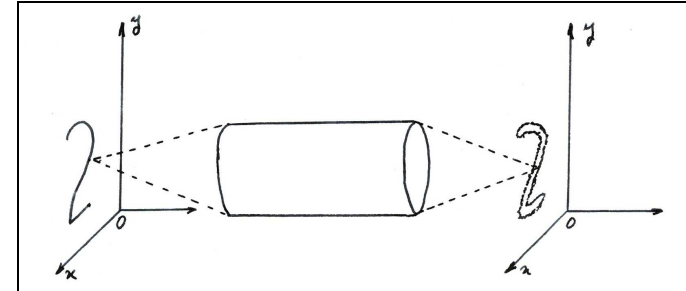
$$\begin{aligned} f(x - x_0, y - y_0) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j2\pi(x_0 \nu_x + y_0 \nu_y)} F(\nu_x, \nu_y) \\ f\left(\frac{x}{b}, \frac{y}{d}\right) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} |bd| F(b\nu_x, d\nu_y) \\ e^{j2\pi(\nu_{x0}x + \nu_{y0}y)} f(x, y) &\xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\nu_x - \nu_{x0}, \nu_y - \nu_{y0}) \end{aligned}$$

• Rotation

Si $f(x, y)$ subit une rotation dans le plan image d'angle Θ , sa transformée de Fourier subit la même rotation.

II-1

TF et produit de convolution



La TF d'un produit de convolution est un produit simple. Ce résultat fondamental a plusieurs applications :

- calcul d'un produit de convolution par passage par la TF puis TF^{-1} ;
 - analyse simplifiée des systèmes linéaires dans le domaine fréquentiel ;
 - implantation des systèmes linéaires dans le domaine fréquentiel.
-

• TF d'un produit de convolution :

$$f(x, y) * h(x, y) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\nu_x, \nu_y) \cdot H(\nu_x, \nu_y)$$

• TF d'un produit simple :

$$f(x, y) \cdot h(x, y) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\nu_x, \nu_y) * H(\nu_x, \nu_y)$$

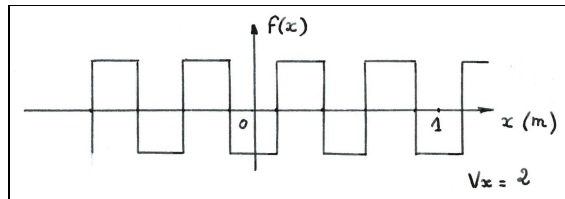
II-2

Interprétation du spectre d'une image

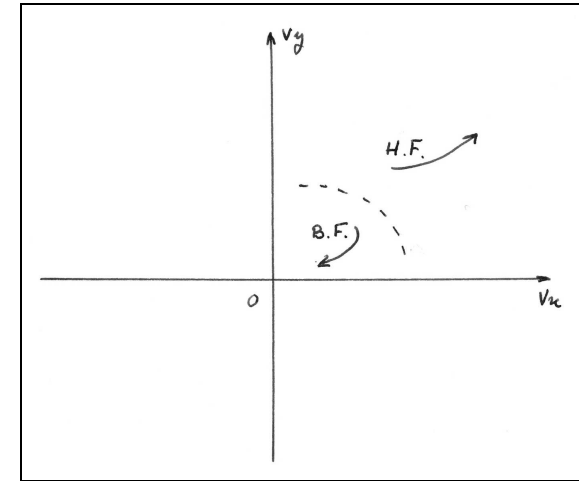
La transformée de Fourier fait partie des transformations classiques utilisées en imagerie. Elle peut s'obtenir de façon analogique, à partir d'un système optique, en réalisant la diffraction à l'infini d'une transparence de transmittance $f(x, y)$. Elle peut également se calculer sur ordinateur sur images numérisées (transformée de Fourier discrète). On s'intéresse ici à l'interprétation du spectre d'une image analogique.

- Propriété des images à support borné :

- ▷ les images à support spatial borné ont un spectre dont le support n'est pas borné ;
- ▷ les images dont le spectre est à support borné ont un support spatial non borné.



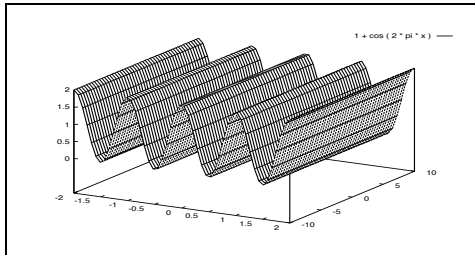
- Notion de fréquence spatiale : la fréquence spatiale d'une fonction périodique indique le nombre de répétitions de cette fonction par unité de longueur. Elle s'exprime en cycles/m.



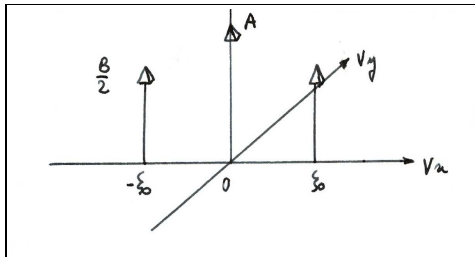
- Interprétation du plan des fréquences spatiales (v_x, v_y) :

- ▷ Le domaine des basses fréquences spatiales correspond aux composantes de l'image variant lentement dans le domaine spatial (x, y) (composantes de niveau de gris quasi-constant, zones uniformes).
- ▷ Le domaine des hautes fréquences spatiales correspond aux composantes de l'image à variations rapides dans le domaine spatial (contours, textures, détails).
- ▷ Si l'image présente des variations rapides lorsqu'on la parcourt dans la direction Θ , on retrouvera une contribution d'énergie significative dans le spectre, le long de la même direction.

Exemple : signal sinusoïdal 2D



$$f(x, y) = A + B \cos(2\pi\xi_0 x)$$



$$F(\nu_x, \nu_y) = A\delta(\nu_x, \nu_y) + \frac{B}{2}[\delta(\nu_x - \xi_0, \nu_y) + \delta(\nu_x + \xi_0, \nu_y)]$$

L'énergie de ce signal est répartie exclusivement sur l'axe $O\nu_x$ car la fonction de départ présente uniquement des variations dans la direction de l'axe Ox . La composante continue A (constante) se retrouve à la fréquence $(\nu_x, \nu_y) = (0, 0)$. La composante sinusoïdale pure apparaît à la fréquence $(\nu_x, \nu_y) = (\xi_0, 0)$.

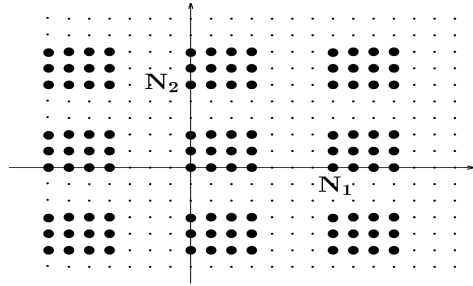
II-2

Spectres des images naturelles

- Le spectre d'une image à valeurs réelle est une fonction à valeurs complexes. Son module est symétrique par rapport à l'origine. On travaille souvent sur le spectre d'énergie $|F(\nu_x, \nu_y)|^2$.
- La transformée de Fourier des images naturelles présente en général une énergie significative dans des régions particulières du spectre :
 - ▷ autour de l'origine : énergie correspondant aux grandes régions de niveau de gris à peu près uniforme ;
 - ▷ le long des axes $O\nu_x$ et $O\nu_y$: c'est le cas si l'image est de support (spatial) fini. Cette énergie (haute fréquence) provient des discontinuités créées par les bords de l'image ;
 - ▷ parfois d'autres contributions d'énergie significative apparaissent dans certaines directions. Elles correspondent à des zones de fortes variations, ou à des motifs périodiques (textures, etc.).
- Le fait que l'énergie d'une image est essentiellement concentrée dans certaines régions du spectre permet de compresser l'information contenue dans l'image en ne retenant que les composantes d'énergie significatives. Ce principe est à la base de nombreux standards de compression d'images (JPEG, MPEG).

II-3

Série de Fourier 2D : cas discret



Soit $x(n_1, n_2)$ un signal 2D discret périodique de périodes : N_1, N_2 .

- Décomposition en série de Fourier :

$$x(n_1, n_2) = \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} a_{k_1 k_2} e^{j2\pi(k_1 \frac{n_1}{N_1} + k_2 \frac{n_2}{N_2})}$$

$$\text{avec : } a_{k_1 k_2} = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1, n_2) e^{-j2\pi(k_1 \frac{n_1}{N_1} + k_2 \frac{n_2}{N_2})}$$

- ▷ les sommes \sum_{k_1} (resp. \sum_{k_2}) peuvent porter sur une portion quelconque de longueur N_1 (resp. N_2).
- ▷ contrairement au cas continu, le nombre de coefficients $a_{k_1 k_2}$ est fini ($N_1 \times N_2$ termes).

II-3

La transformée de Fourier 2D : cas discret

$$X(\nu_1, \nu_2) = \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{+\infty} x(n_1, n_2) e^{-j2\pi(n_1 \nu_1 + n_2 \nu_2)}$$

$$x(n_1, n_2) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} X(\nu_1, \nu_2) e^{j2\pi(n_1 \nu_1 + n_2 \nu_2)} d\nu_1 d\nu_2$$

- La TF d'une suite numérique 2D est une fonction ou une distribution !
- La TF d'une suite numérique 2D est périodique de période rectangulaire (1, 1).
- Cette transformation existe pour toute suite 2D vérifiant une des conditions suivantes :

$$\sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{+\infty} |x(n_1, n_2)| < \infty$$

$$\sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{+\infty} |x(n_1, n_2)|^2 < \infty$$

- Exemples :

▷ l'impulsion unité :

$$x(n_1, n_2) = \delta(n_1, n_2)$$

$$X(\nu_1, \nu_2) = 1$$

▷ la fonction porte 2D discrète

$$x(n_1, n_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } \begin{cases} n_1 \in \{-M_1, \dots, M_1\} \\ n_2 \in \{-M_2, \dots, M_2\} \end{cases} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$X(\nu_1, \nu_2) = \frac{\sin[(2M_1 + 1)\pi\nu_1]}{\sin(\pi\nu_1)} \frac{\sin[(2M_2 + 1)\pi\nu_2]}{\sin(\pi\nu_2)}$$

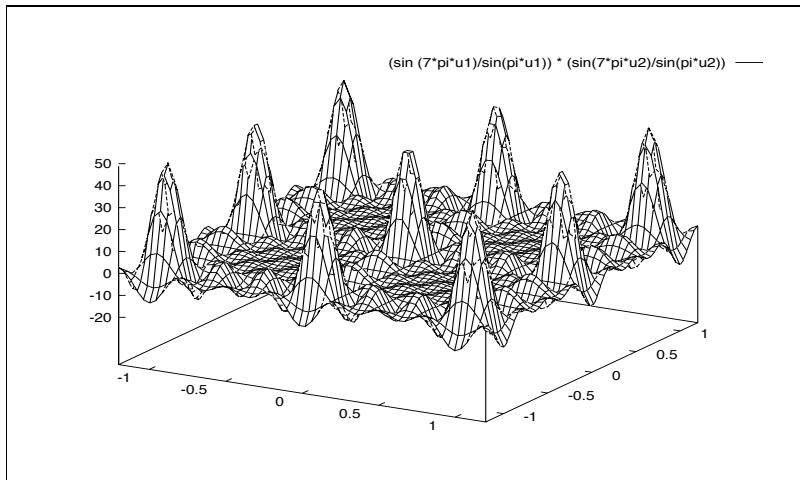


Figure 1: T.F. de la fonction porte discrète ($M_1 = M_2 = 3$)

II-3

TF des suites numériques périodiques

Un signal discret périodique $x(n_1, n_2)$ n'est pas intégrable et n'a donc pas de TF au sens des fonctions. Il admet toutefois une TF au sens des distributions. Cette TF est une somme pondérée de distributions de Dirac (spectre de raies).

• Soit $x(n_1, n_2)$ périodique (de période N_1, N_2).

• Décomposition en série de Fourier de $x(n_1, n_2)$:

$$x(n_1, n_2) = \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} a_{k_1 k_2} e^{j2\pi(k_1 \frac{n_1}{N_1} + k_2 \frac{n_2}{N_2})}$$

• Transformée de Fourier de $x(n_1, n_2)$ (périodique de période 1, 1 !) :

$$X(\nu_1, \nu_2) = \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} a_{k_1 k_2} \delta(\nu_1 - \frac{k_1}{N_1}, \nu_2 - \frac{k_2}{N_2})$$

où $\delta(\nu_1, \nu_2)$ est une impulsion de Dirac ! Dans cette formule les $a_{k_1 k_2}$ sont supposés périodiques de périodes N_1, N_2 .

II-3	Quelques transformées classiques...
------	-------------------------------------

- Signal constant :

$$x(n_1, n_2) = C$$

$$\xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\nu_1, \nu_2) = C \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} \delta(\nu_1 - k_1, \nu_2 - k_2)$$

- Exponentielle complexe et sinusoides :

$$\xleftrightarrow{\mathcal{F}} \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi(\nu_a n_1 + \nu_b n_2)} \delta(\nu_1 - \nu_a - k_1, \nu_2 - \nu_b - k_2)$$

$$\xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2} \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} [\cos(2\pi(\nu_a n_1 + \nu_b n_2)) \delta(\nu_1 - \nu_a - k_1, \nu_2 - \nu_b - k_2) + \delta(\nu_1 + \nu_a - k_1, \nu_2 + \nu_b - k_2)]$$

$$\xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2j} \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} [\sin(2\pi(\nu_a n_1 + \nu_b n_2)) \delta(\nu_1 - \nu_a - k_1, \nu_2 - \nu_b - k_2) - \delta(\nu_1 + \nu_a - k_1, \nu_2 + \nu_b - k_2)]$$

- Peigne d'impulsions unité :

$$\sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} \delta(n_1 - k_1 N_1, n_2 - k_2 N_2)$$

$$\xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} \delta(\nu_1 - \frac{k_1}{N_1}, \nu_2 - \frac{k_2}{N_2})$$

II-3	Transformée de Fourier : propriétés
------	-------------------------------------

$$X(\nu_1, \nu_2) = \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{+\infty} x(n_1, n_2) e^{-j2\pi(n_1 \nu_1 + n_2 \nu_2)}$$

$$x(n_1, n_2) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} X(\nu_1, \nu_2) e^{j2\pi(\nu_1 n_1 + \nu_2 n_2)} d\nu_1 d\nu_2$$

- Linéarité

$$\text{si } \begin{array}{l} x_1(n_1, n_2) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_1(\nu_1, \nu_2) \\ x_2(n_1, n_2) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_2(\nu_1, \nu_2) \end{array}$$

$$\text{alors } \begin{array}{l} ax_1(n_1, n_2) + bx_2(n_1, n_2) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \\ aX_1(\nu_1, \nu_2) + bX_2(\nu_1, \nu_2) \end{array}$$

- Symétrie

▷ si $x(n_1, n_2)$ est réel :

$$\begin{array}{l} X(-\nu_1, -\nu_2) = X^*(\nu_1, \nu_2) \\ |X(-\nu_1, -\nu_2)| = |X(\nu_1, \nu_2)| \\ \text{Arg } X(-\nu_1, -\nu_2) = -\text{Arg } X(\nu_1, \nu_2) \end{array}$$

II-3

Transformée de Fourier : propriétés

$$X(\nu_1, \nu_2) = \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{+\infty} x(n_1, n_2) e^{-j2\pi(n_1\nu_1 + n_2\nu_2)}$$

$$x(n_1, n_2) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} X(\nu_1, \nu_2) e^{j2\pi(\nu_1 n_1 + \nu_2 n_2)} d\nu_1 d\nu_2$$

• Cas des suites numériques séparables

$$\text{si } x_1(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_1(\nu)$$

$$\text{si } x_2(n) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_2(\nu)$$

$$x(n_1, n_2) = x_1(n_1) x_2(n_2) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X_1(\nu_1) X_2(\nu_2)$$

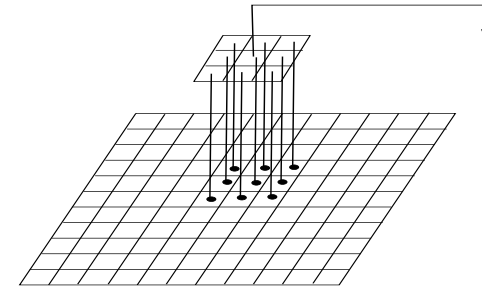
• Translations

$$x(n_1 - m_1, n_2 - m_2) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j2\pi(m_1\nu_1 + m_2\nu_2)} X(\nu_1, \nu_2)$$

$$e^{j2\pi(\nu_a n_1 + \nu_b n_2)} x(n_1, n_2) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\nu_1 - \nu_a, \nu_2 - \nu_b)$$

II-3

TF et produit de convolution



La TF d'un produit de convolution est un produit simple, comme dans le cas continu.

• TF d'un produit de convolution :

$$x(n_1, n_2) * h(n_1, n_2) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\nu_1, \nu_2) \cdot H(\nu_1, \nu_2)$$

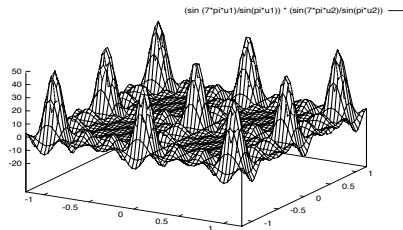
• TF d'un produit simple :

$$x(n_1, n_2) \cdot h(n_1, n_2) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} X(\alpha, \beta) H(\nu_1 - \alpha, \nu_2 - \beta) d\alpha d\beta$$

Cette dernière formule peut s'interpréter comme un produit de convolution sur une période du spectre.

II-4

Spectre d'une image numérique



• La transformée de Fourier :

$$X(\nu_1, \nu_2) = \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{+\infty} x(n_1, n_2) e^{-j2\pi(n_1\nu_1 + n_2\nu_2)}$$

d'une image numérique $x(n_1, n_2)$ ne peut se calculer directement sur ordinateur car :

- ▷ (ν_1, ν_2) sont des variables continues (et devront donc être discrétisées) ;
- ▷ $\sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{+\infty}$ porte sur un nombre infini de termes.

On a recours à une transformée discrétisée appelée "Transformée de Fourier Discrète" (TFD) qui approche la transformée de Fourier du signal discret $X(\nu_1, \nu_2)$. La Transformée de Fourier Discrète sera étudiée en détail dans la partie VI.

- Notion de hautes et basses fréquences : spectre périodique, souvent représentation sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

II-5

Intercorrélation ou corrélation

L'intercorrrelation (ou "corrrelation") de deux signaux permet de mesurer le degré de similitude entre ces signaux. Elle est largement utilisée en imagerie en reconnaissance des formes et pour localiser un objet dans une scène, à partir d'un modèle ("template") de cet objet (technique du "template matching").

• Cas des signaux continus

soient $f(x, y)$ et $g(x, y)$ deux signaux d'énergie finie :

- ▷ Fonction d'intercorrrelation (produit de corrélation de f par g) :

$$R_{fg}(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(\alpha, \beta) g(\alpha + x, \beta + y) d\alpha d\beta$$

- ▷ Propriété utile :

$$R_{fg}(x, y) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\nu_x, \nu_y) \cdot G^*(\nu_x, \nu_y)$$

- Cas des signaux discrets

soient $x(n_1, n_2)$ et $y(n_1, n_2)$ deux signaux discrets :

- ▷ Fonction d'intercorrélacion (produit de corrélation de x par y) :

$$R_{xy}(n_1, n_2) = \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} x^*(k_1, k_2) y(k_1 + n_1, k_2 + n_2)$$

- ▷ Propriété utile :

$$R_{xy}(n_1, n_2) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(\nu_1, \nu_2) \cdot Y^*(\nu_1, \nu_2)$$

Cette propriété est souvent utilisée pour calculer la corrélation entre deux signaux numérisés, dans le domaine de Fourier (par FFT). Cette technique est plus rapide que le calcul direct dans le domaine spatial lorsque la taille des images x et y est grande.

Pour que le calcul de la transformation de Fourier par FFT soit exact, il faut prendre quelques précautions (ajouter des zéros au signal pour éviter les repliements, voir partie VI).

Le problème est de localiser et de reconnaître un objet dans une scène. On dispose d'un modèle (imagerie de référence - “template”) de cet objet :

$w(n_1, n_2)$, $n_1 = -Q_1, \dots, Q_1$; $n_2 = -Q_2, \dots, Q_2$.

Le principe consiste à corréler l'image en entrée $x(n_1, n_2)$ (taille $P_1 \times P_2$) avec l'imagerie de référence $w(n_1, n_2)$ et à détecter le maximum de la fonction de corrélation (pic de corrélation) qui donne la position de l'objet dans la scène.

- Fonction de corrélation (images réelles)

$$R_{wx}(u, v) = \sum_{k_1=-Q_1}^{+Q_1} \sum_{k_2=-Q_2}^{+Q_2} w(k_1, k_2) x(k_1 + u, k_2 + v)$$

pour $u = Q_1, \dots, P_1 - 1 - Q_1$, $v = Q_2, \dots, P_2 - 1 - Q_2$.

Position estimée de l'objet : (\hat{u}, \hat{v}) avec :

$$R_{wx}(\hat{u}, \hat{v}) = \max_{(u,v) \in \{Q_1, P_1-1-Q_1\} \times \{Q_2, P_2-1-Q_2\}} R_{wx}(u, v)$$

Le recours à la FFT pour calculer la corrélation dans ce cas se justifie dès que le nombre de pixels composant w est supérieur à 132.

- Coefficient de corrélation

L'idée est de prendre la fonction de corrélation et de la normaliser (en moyenne et variance). Les pics de corrélation sont alors plus accusés. Cette méthode donne généralement de meilleurs résultats.

$$C_{wx}(u, v) = \frac{\sum_{k_1=-Q_1}^{+Q_1} \sum_{k_2=-Q_2}^{+Q_2} [w(k_1, k_2) - \bar{w}] \cdot [x(k_1 + u, k_2 + v) - \bar{x}(u, v)]}{\sqrt{\sigma_w^2} \sqrt{\sigma_x^2(u, v)}}$$

avec :

$$\sigma_w^2 = \frac{1}{(2Q_1 + 1)(2Q_2 + 1)} \sum_{k_1=-Q_1}^{+Q_1} \sum_{k_2=-Q_2}^{+Q_2} (w(k_1, k_2) - \bar{w})^2$$

$$\bar{w} = \frac{1}{(2Q_1 + 1)(2Q_2 + 1)} \sum_{k_1=-Q_1}^{+Q_1} \sum_{k_2=-Q_2}^{+Q_2} w(k_1, k_2)$$

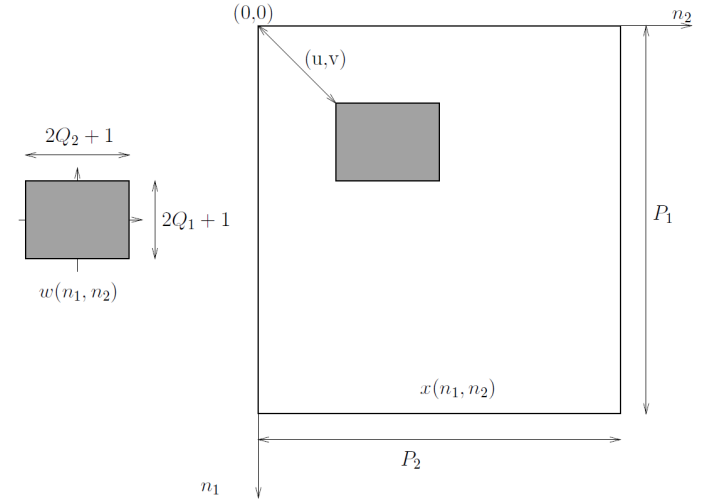
$$\sigma_x^2(u, v) = \frac{1}{(2Q_1 + 1)(2Q_2 + 1)} \sum_{k_1=-Q_1}^{+Q_1} \sum_{k_2=-Q_2}^{+Q_2} (x(k_1 + u, k_2 + v) - \bar{x}(u, v))^2$$

$$\bar{x}(u, v) = \frac{1}{(2Q_1 + 1)(2Q_2 + 1)} \sum_{k_1=-Q_1}^{+Q_1} \sum_{k_2=-Q_2}^{+Q_2} x(k_1 + u, k_2 + v)$$

Position estimée de l'objet : (\hat{u}, \hat{v}) avec :

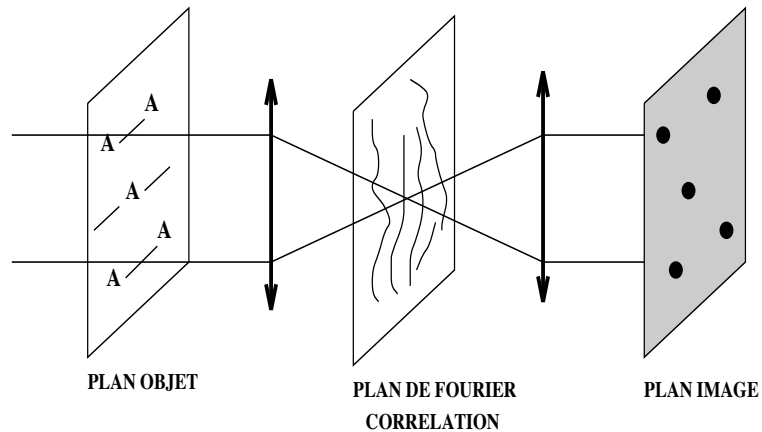
$$C_{wx}(\hat{u}, \hat{v}) = \max_{(u,v) \in \{Q_1, P_1-1-Q_1\} \times \{Q_2, P_2-1-Q_2\}} C_{wx}(u, v)$$

II-5	“Template matching”
------	---------------------



II-5

Corrélation optique

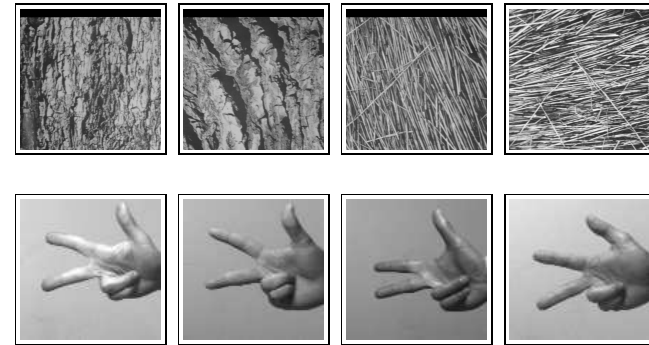


On peut aisément réaliser des corrélateurs optiques pour des tâches de reconnaissance de formes (par exemple : systèmes optiques de reconnaissance de caractères imprimés).

- Principe (voir V-2) :
 - ▷ Calcul de la T.F. par voie optique.
 - ▷ La corrélation est réalisée dans le domaine de Fourier.
- La présence de l'objet (lettre "A") dans l'image en entrée (texte imprimé) se signale par une corrélation maximale qui se traduit dans l'image en sortie par des points lumineux intenses.

II-6

Images aléatoires, densité spectrale de puissance

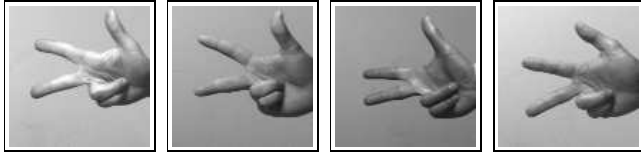


© Brodatz, Dover Pub. 1966 et LSIIT 1998

- Image aléatoire = ensemble infini de signaux déterministes différents correspondant à des « réalisations » du signal.
- Le « spectre » ne doit plus être défini sur une image unique, mais sur cet ensemble !
- On utilise la densité spectrale de puissance (d.s.p.) qui est la T.F. de la fonction d'autocorrélation statistique.
- Estimation spectrale = mesure ou calcul de la d.s.p.

II-6

Images aléatoires, densité spectrale de puissance



• Images analogiques :

▷ définition :

$$S_f(\nu_x, \nu_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_f(x, y) e^{-j2\pi(\nu_x x + \nu_y y)} dx dy$$

▷ relation inverse :

$$R_f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S_f(\nu_x, \nu_y) e^{j2\pi(\nu_x x + \nu_y y)} d\nu_x d\nu_y$$

• Images numériques :

▷ définition :

$$S_X(\nu_1, \nu_2) = \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{+\infty} R_X(n_1, n_2) e^{-j2\pi(n_1 \nu_1 + n_2 \nu_2)}$$

(périodique de période $(1, 1)$).

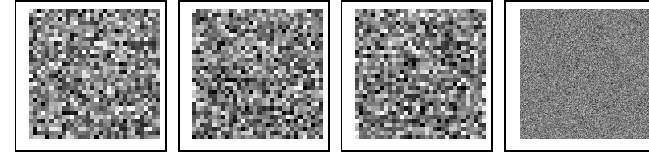
▷ relation inverse :

$$R_X(n_1, n_2) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} S_X(\nu_1, \nu_2) e^{j2\pi(n_1 \nu_1 + n_2 \nu_2)} d\nu_1 d\nu_2$$

En pratique pour effectuer une estimation spectrale lorsqu'on ne dispose que d'une réalisation du signal 2D, on utilise l'hypothèse d'ergodicité et on remplace les moyennes statistiques par des moyennes spatiales.

II-6

Le bruit blanc 2D



Le bruit blanc 2D est un signal aléatoire très utilisé comme modèle simple de bruit. Il est caractérisé par une décorrélation complète entre échantillons situés en des points différents. Sa d.s.p. est constante (la puissance se répartit de façon uniforme sur l'ensemble des fréquences).

• Le bruit blanc discret 2D

C'est une image aléatoire $X(n_1, n_2)$ caractérisée par :

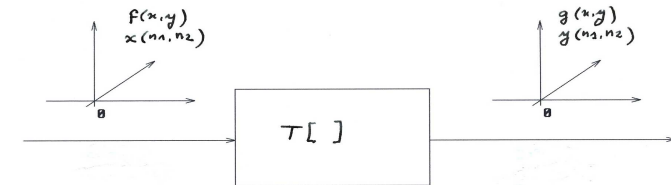
$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X(n_1, n_2)] &= 0 \\ R_X(n_1, n_2) &= \sigma^2 \delta(n_1, n_2) \\ S_X(\nu_1, \nu_2) &= \sigma^2 \end{aligned}$$

où $\delta(n_1, n_2)$ est l'impulsion unité.

PARTIE III

SIGNAUX ET SYSTÈMES MULTIDIMENSIONNELS

III-1	Systèmes multidimensionnels de TS
-------	-----------------------------------



Les systèmes de TS permettent de transformer les signaux et/ou d'extraire l'information qu'ils contiennent.

- Un système est un opérateur T qui fait correspondre à un signal $f(x,y)$ ($x(n_1, n_2)$) (entrée du système) un signal $g(x,y)$ ($y(n_1, n_2)$) (sortie du système).

On écrira :

$$\begin{aligned} g(x,y) &= T[f(x,y)] \\ y(n_1, n_2) &= T[x(n_1, n_2)] \end{aligned}$$

- Pour décrire complètement un système quelconque il faut indiquer quelle est sa réponse à une entrée arbitraire. Une telle description peut être très complexe dans le cas général.

III-1	Systèmes linéaires invariants par translation
-------	---

Les systèmes linéaires et invariants par translation (LIT) se décrivent de façon particulièrement simple et compacte.

Un système linéaire invariant par translation (LIT) $T[\cdot]$ vérifie les deux propriétés suivantes :

- Linéarité

$$\begin{aligned} \text{cas continu : } & \forall a, b \in \mathbb{C} \quad T[a f_1(x, y) + b f_2(x, y)] \\ &= a T[f_1(x, y)] + b T[f_2(x, y)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{cas discret : } & \forall a, b \in \mathbb{C} \quad T[a x_1(n_1, n_2) + b x_2(n_1, n_2)] \\ &= a T[x_1(n_1, n_2)] + b T[x_2(n_1, n_2)] \end{aligned}$$

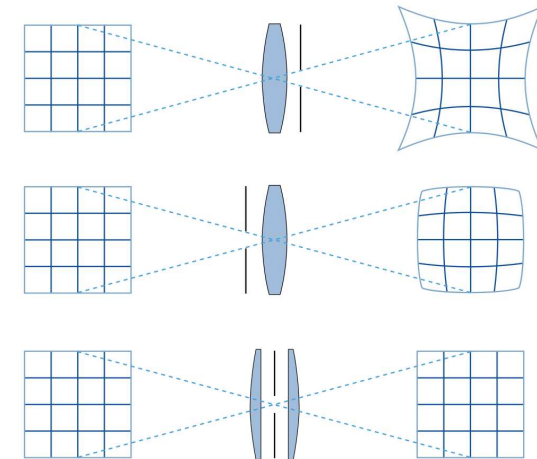
- Invariance par translation (=stationnarité)

$$\begin{aligned} \text{cas continu : si } & g(x, y) = T[f(x, y)], \quad \forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \\ & T[f(x - x_0, y - y_0)] = g(x - x_0, y - y_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{cas discret : si } & y(n_1, n_2) = T[x(n_1, n_2)], \quad \forall (m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2 \\ & T[x(n_1 - m_1, n_2 - m_2)] = y(n_1 - m_1, n_2 - m_2) \end{aligned}$$

- les systèmes LIT couvrent une large classe de systèmes physiques ;
- ces systèmes sont encore appelés *filtres*.

III-1	Systèmes linéaires invariants par translation
-------	---

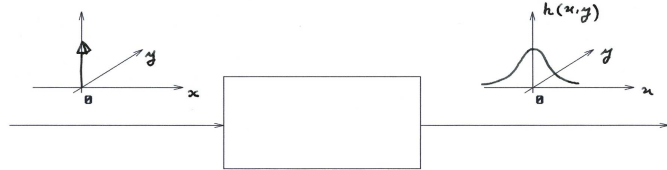


Distorsions en coussinet et en barillet d'un système optique

© Creative Commons - Wikimedia

III-2

Réponse impulsionnelle : cas continu



La réponse impulsionnelle $h(x, y)$ d'un système LIT est la réponse du système à une impulsion de Dirac à l'origine $\delta(x, y)$:

$$h(x, y) = T[\delta(x, y)]$$

- Réponse $g(x, y)$ du système à une entrée $f(x, y)$ quelconque :

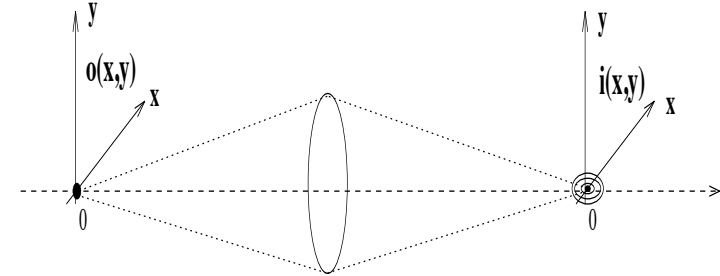
$$\begin{aligned} g(x, y) &= f(x, y) * h(x, y) = h(x, y) * f(x, y) \\ \text{soit : } g(x, y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha, \beta) h(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - \alpha, y - \beta) h(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \end{aligned}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha, \beta) \delta(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta \\ T[f(x, y)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha, \beta) T[\delta(x - \alpha, y - \beta)] d\alpha d\beta \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha, \beta) h(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta \end{aligned}$$

III-2

Réponse impulsionnelle : exemple



Dans le cas d'un système optique LIT, la réponse impulsionnelle correspond à l'image d'une source ponctuelle $\delta(x, y)$. L'image d'une source ponctuelle est généralement une tache ("tache d'Airy" ou "figure de diffraction").

Exemple : image d'une étoile en astronomie.

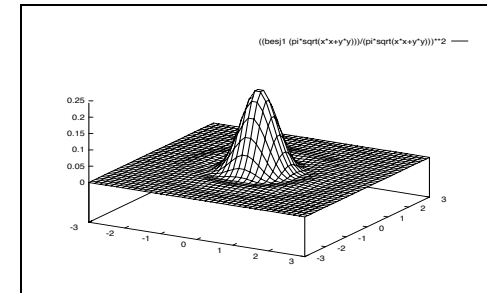
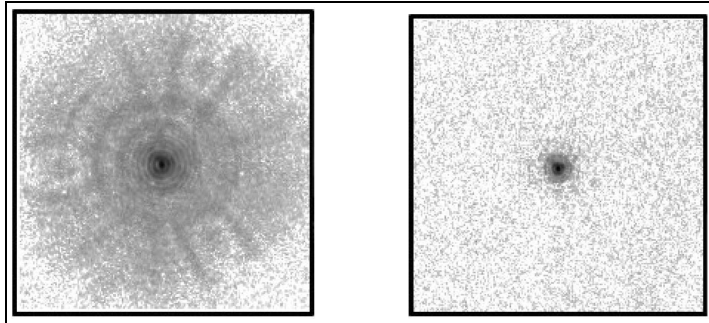


Image d'une source ponctuelle

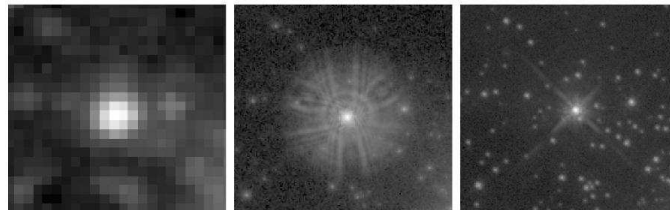
III-2

Réponse impulsionnelle : exemple



Réponse impulsionnelle du télescope Hubble avant et après intervention (1993)

Comparison of ground-based observations of a field of stars in 30 Doradus with Hubble Space Telescope images taken before and after replacement of the first Wide Field and Planetary Camera with WFPC-2



Ground image at 0.6 arcsec resolution

WFPC-1 image (before servicing)

WFPC-2 image (after servicing)

Source : <http://hubblesite.org>

III-2

Réponse impulsionnelle : exemple

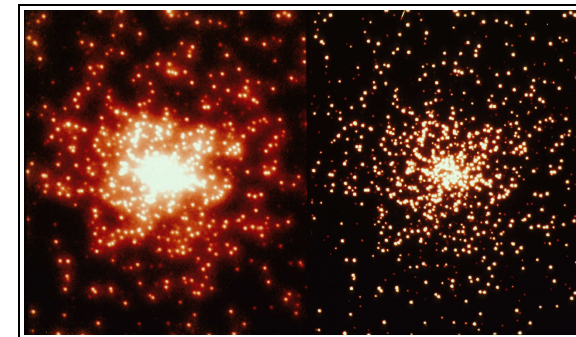
M100 Galactic Nucleus

Hubble Space Telescope
Wide Field Planetary Camera 2



Wide Field Planetary Camera 1

Wide Field Planetary Camera 2

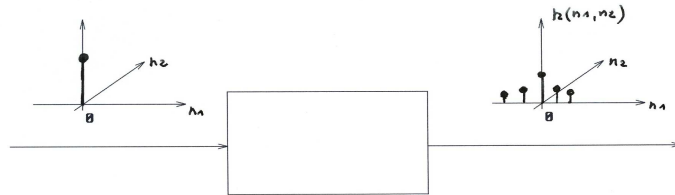


Images du télescope Hubble avant et après intervention (1993)

Source : <http://hubblesite.org>

III-2

Réponse impulsionnelle : cas discret



La réponse impulsionnelle $h(n_1, n_2)$ d'un système LIT est la réponse du système à une impulsion unité à l'origine $\delta(n_1, n_2)$:

$$h(n_1, n_2) = T[\delta(n_1, n_2)]$$

- Réponse $y(n_1, n_2)$ du système à une entrée $x(n_1, n_2)$ quelconque :

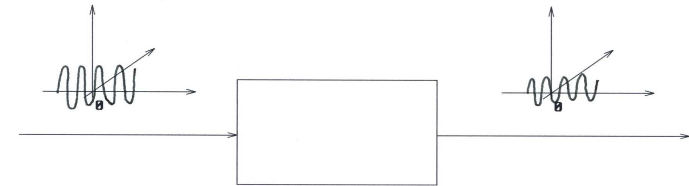
$$\begin{aligned} y(n_1, n_2) &= x(n_1, n_2) * h(n_1, n_2) \\ &= h(n_1, n_2) * x(n_1, n_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{soit : } y(n_1, n_2) &= \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} x(k_1, k_2) h(n_1 - k_1, n_2 - k_2) \\ &= \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} x(n_1 - k_1, n_2 - k_2) h(k_1, k_2) \end{aligned}$$

Démonstration : cf. cas continu

III-3

Réponse en fréquence : cas continu



- Réponse harmonique = réponse du système à une « fréquence pure » (exponentielle complexe) :

$$T \left[e^{j2\pi(v_{xo}x + v_{yo}y)} \right] = H(v_{xo}, v_{yo}) e^{j2\pi(v_{xo}x + v_{yo}y)}$$

avec : $H(v_x, v_y) = \mathcal{F}[h(x, y)]$

- ▷ $H(v_x, v_y)$ est la « réponse en fréquence » du système :

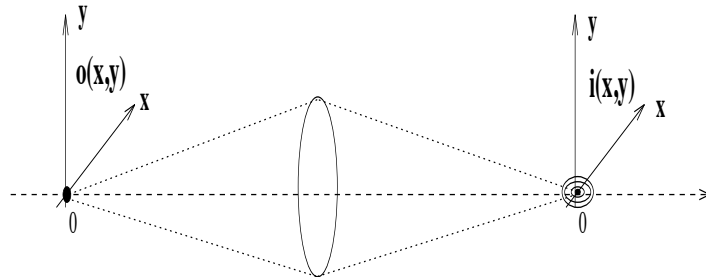
$$H(v_x, v_y) = |H(v_x, v_y)| e^{j \text{Arg } H(v_x, v_y)}$$

- ▷ Le signal $e^{j2\pi(v_{xo}x + v_{yo}y)}$ subit, au passage du système, un gain $|H(v_{xo}, v_{yo})|$ et un déphasage d'angle $\text{Arg } H(v_{xo}, v_{yo})$.

III-3

Relations entrée-sortie des systèmes LIT

Cas continu



Un système LIT peut être indifféremment décrit par les relations entrée-sortie suivantes :

- Dans le domaine spatial : convolution par la réponse impulsionnelle $h(x, y)$

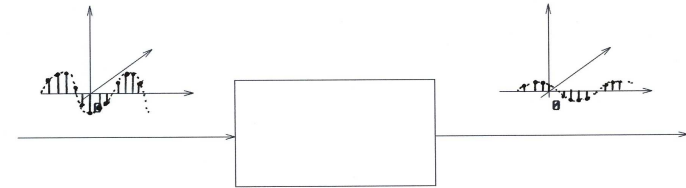
$$g(x, y) = f(x, y) * h(x, y)$$

- Dans le domaine fréquentiel (Fourier) : multiplication par la réponse en fréquence $H(\nu_x, \nu_y)$

$$G(\nu_x, \nu_y) = F(\nu_x, \nu_y) \cdot H(\nu_x, \nu_y)$$

III-3

Réponse en fréquence : cas discret



- Réponse harmonique = réponse du système à une « fréquence pure » (exponentielle complexe) :

$$T \left[e^{j2\pi(v_a n_1 + v_b n_2)} \right] = H(v_a, v_b) e^{j2\pi(v_a n_1 + v_b n_2)}$$

$$\text{avec : } H(\nu_1, \nu_2) = \mathcal{F}[h(n_1, n_2)]$$

▷ $H(\nu_1, \nu_2)$ est la « réponse en fréquence » du système :

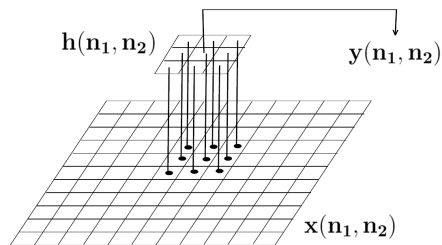
$$H(\nu_1, \nu_2) = |H(\nu_1, \nu_2)| e^{j \text{Arg } H(\nu_1, \nu_2)}$$

▷ Le signal $e^{j2\pi(v_a n_1 + v_b n_2)}$ subit, au passage du système, un gain $|H(v_a, v_b)|$ et un déphasage d'angle $\text{Arg } H(v_a, v_b)$.

III-3

Relations entrée-sortie des systèmes LIT

Cas discret



Un système LIT peut être indifféremment décrit par les relations entrée-sortie suivantes :

- Dans le domaine spatial : convolution par la réponse impulsionnelle $h(n_1, n_2)$

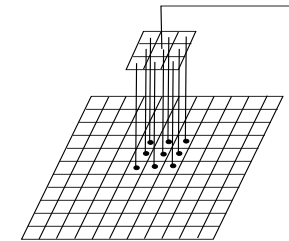
$$y(n_1, n_2) = x(n_1, n_2) * h(n_1, n_2)$$

- Dans le domaine fréquentiel (Fourier) : multiplication par la réponse en fréquence $H(\nu_1, \nu_2)$

$$Y(\nu_1, \nu_2) = X(\nu_1, \nu_2) \cdot H(\nu_1, \nu_2)$$

III-3

Cas important des filtres séparables



Filtre séparable (cas continu) :

$$h(x, y) = h_1(x) h_2(y)$$

$$H(\nu_x, \nu_y) = H_1(\nu_x) \cdot H_2(\nu_y)$$

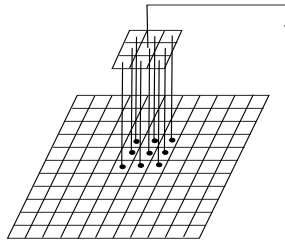
Convolution 2D

= convolutions 1D sur les lignes et colonnes de l'image

$$\begin{aligned} g(x, y) &= f(x, y) * h(x, y) \\ &= \underbrace{[f(x, y) * h_1(x)]}_{\text{convolution lignes}} * \underbrace{h_2(y)}_{\text{convolution colonnes}} \end{aligned}$$

III-3

Cas important des filtres séparables



Filtre séparable (cas discret) :

$$h(n_1, n_2) = h_1(n_1) h_2(n_2)$$

$$H(\nu_1, \nu_2) = H_1(\nu_1) \cdot H_2(\nu_2)$$

Un filtre 2D est séparable ssi :

- les lignes de la matrice h sont proportionnelles
- et de même pour les colonnes

exemple :
$$h(n_1, n_2) = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 9 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

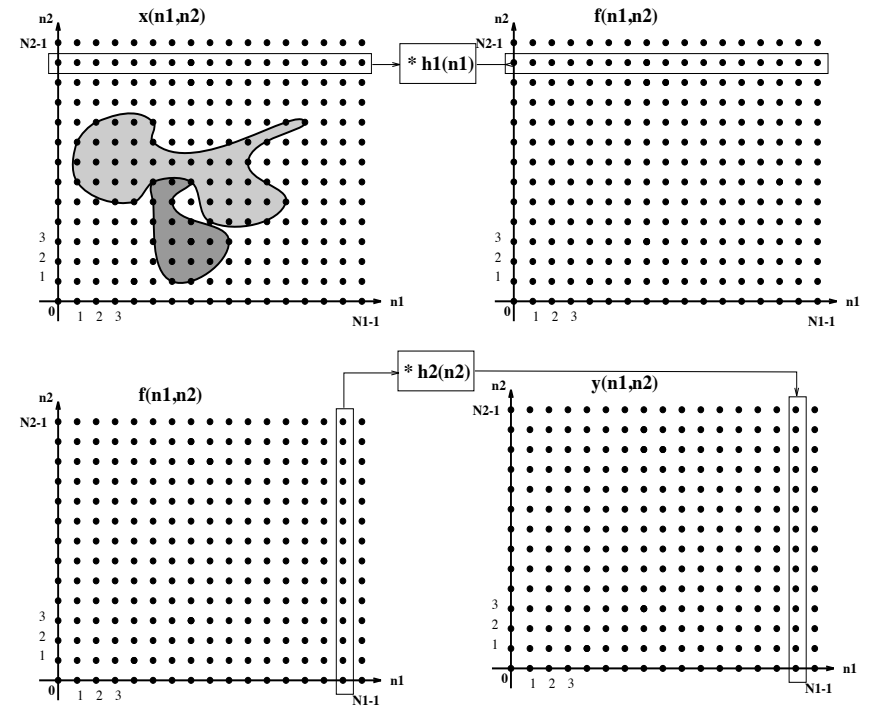
Convolution 2D

= convolutions 1D sur les lignes et colonnes de l'image

$$\begin{aligned} y(n_1, n_2) &= x(n_1, n_2) * h(n_1, n_2) \\ &= \underbrace{[x(n_1, n_2) * h_1(n_1)]}_{\text{convolution lignes}} * \underbrace{h_2(n_2)}_{\text{convolution colonnes}} \end{aligned}$$

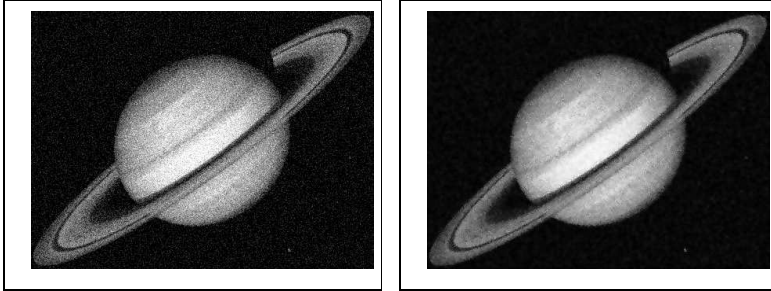
III-3

Cas important des filtres séparables



III-3

Filtrage des images aléatoires analogiques



Soit $F(x, y, \omega)$ une image aléatoire stationnaire. On applique le filtre de réponse $H(\nu_x, \nu_y)$ à une réalisation $f(x, y)$ de $F(x, y, \omega)$. La sortie $g(x, y)$ est une réalisation d'un processus aléatoire $G(x, y, \omega)$ dont on souhaite déterminer les caractéristiques statistiques. Les propriétés suivantes sont établies :

- $G(x, y, \omega)$ est également stationnaire.

- Relation entre valeurs moyennes :

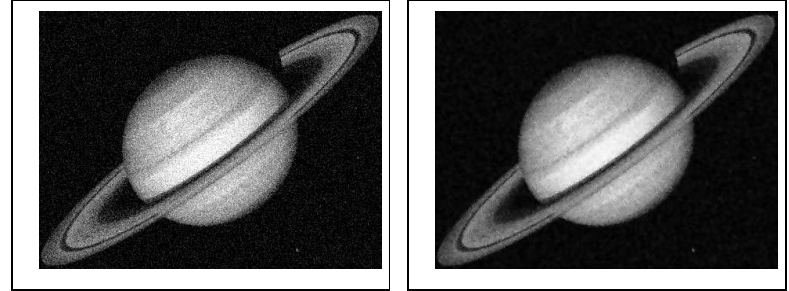
$$m_G = H(0, 0) m_F$$

- Relation entre d.s.p. :

$$S_G(\nu_x, \nu_y) = S_F(\nu_x, \nu_y) |H(\nu_x, \nu_y)|^2$$

III-3

Filtrage des images aléatoires numériques



Soit $X(n_1, n_2, \omega)$ une image aléatoire stationnaire. On applique le filtre $H(\nu_1, \nu_2)$ à une réalisation $x(n_1, n_2)$ de $X(n_1, n_2, \omega)$. La sortie $y(n_1, n_2)$ est une réalisation d'une image aléatoire $Y(n_1, n_2, \omega)$ dont on souhaite déterminer les caractéristiques statistiques. Les propriétés suivantes sont établies :

- $Y(n_1, n_2, \omega)$ est également stationnaire.

- Relation entre valeurs moyennes :

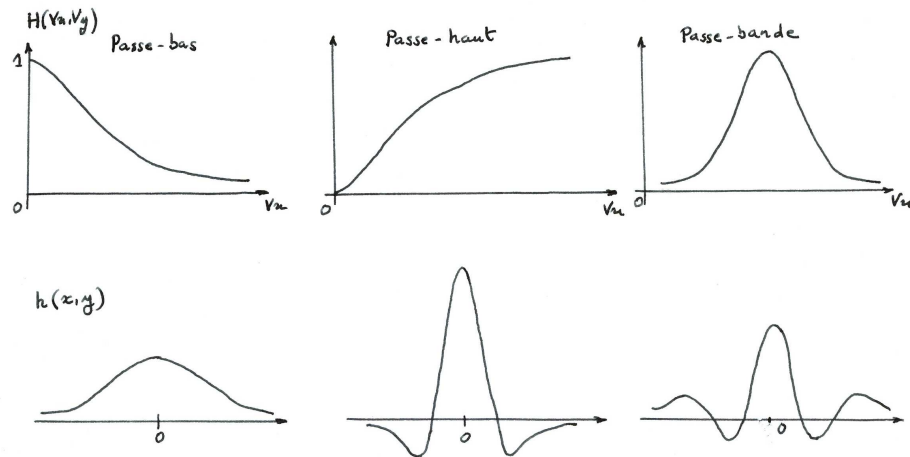
$$m_Y = H(0, 0) m_X$$

- Relation entre d.s.p. :

$$S_Y(\nu_1, \nu_2) = S_X(\nu_1, \nu_2) |H(\nu_1, \nu_2)|^2$$

III-4

Les grandes classes de filtres

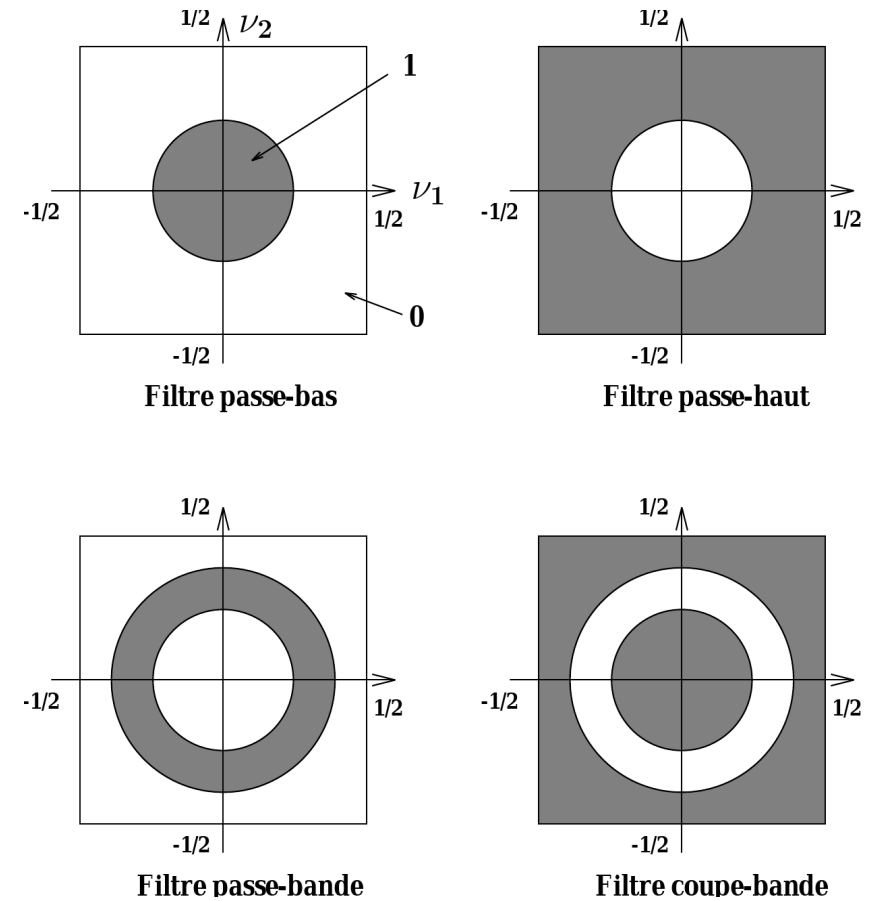


Les grandes classes de filtres :

- Filtres passe-bas : lissage, atténuation du bruit.
- Filtres passe-haut : accentuation des détails, détection des contours.
- Filtres passe-bande : sélection de bandes fréquentielles spécifiques.

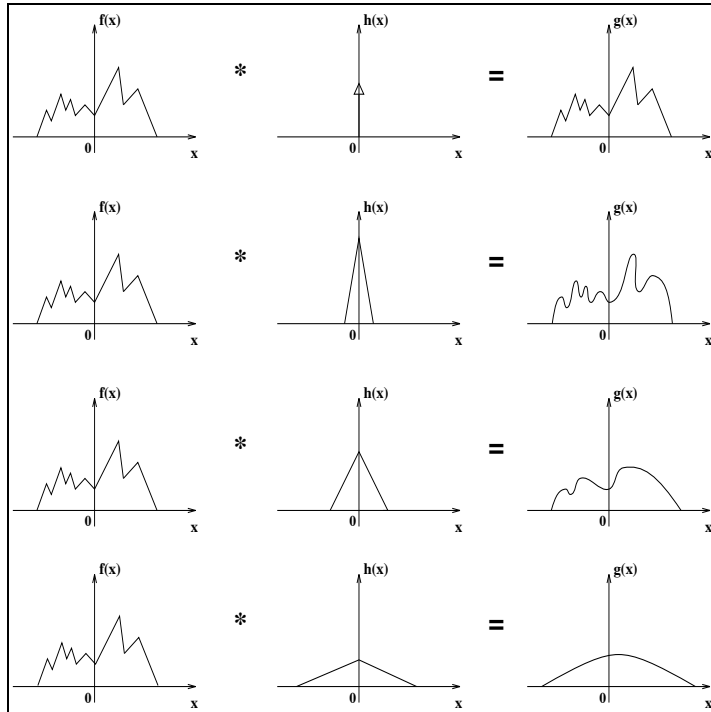
III-4

Réponses en fréquence : filtres 2D idéaux



III-4

Les filtres en imagerie

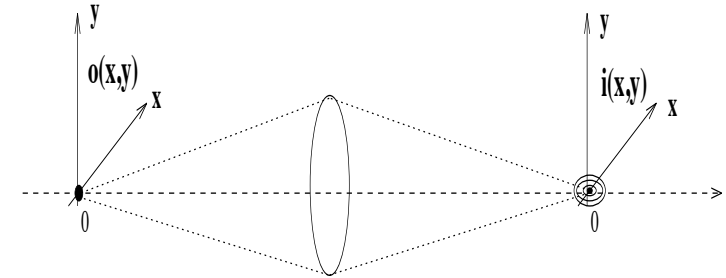


d'après [Gaskill-78]

De nombreux systèmes physiques (diffraction des systèmes optiques, flou de bougé, turbulences atmosphériques, défocalisation) sont des filtres passe-bas qui ont pour effet d'atténuer les hautes fréquences, donc de lisser les détails de l'image et le bruit (introduction d'un "flou" sur l'image).

III-4

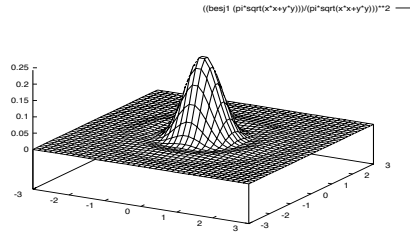
Exemple 1 : système optique



On considère un système optique (parfait) formant dans le plan image Π l'image $i(x, y)$ d'un objet $o(x, y)$. On se place dans le cas de l'optique incohérente. Les grandeurs intervenant dans la description du système sont alors les éclaircissement ou intensités (positives !).

- Un système optique parfait est un système LIT.
- En raison de son ouverture finie, le système optique provoque une diffraction de l'onde incidente. L'image d'une source ponctuelle est alors une tache (parfois appelée "tache d'Airy") qui est une figure de diffraction (en intensité). Cette tache n'est autre que la réponse impulsionnelle $h(x, y)$ du système.

Dans le cas d'une simple lentille $h(x, y)$ a l'allure suivante :



- L'intensité $i(x, y)$, image d'un objet $o(x, y)$ quelconque est alors donnée par :

$$i(x, y) = o(x, y) * h(x, y)$$

- L'objectif se comporte comme un filtre passe-bas, de réponse en fréquence :

$$H(\nu_x, \nu_y) = \mathcal{F}[h(x, y)]$$

$H(\nu_x, \nu_y)$ est la fonction de transfert optique (FTO) du système (complexe). $|H(\nu_x, \nu_y)|$ est la fonction de transfert de modulation (FTM). Elle indique comment les différentes fréquences spatiales sont atténuées par le système optique.

III-4

Exemple 2 : Flou de bougé

Modélisation d'un flou de bougé (de caméra) lors de l'acquisition d'une image.

- Scène (immobile) : $f(x, y)$
- Image observée (bougé) : $f(x - x_o(t), y - y_o(t))$
- Flou de bougé = intégration de l'image mobile pendant une durée Δ :

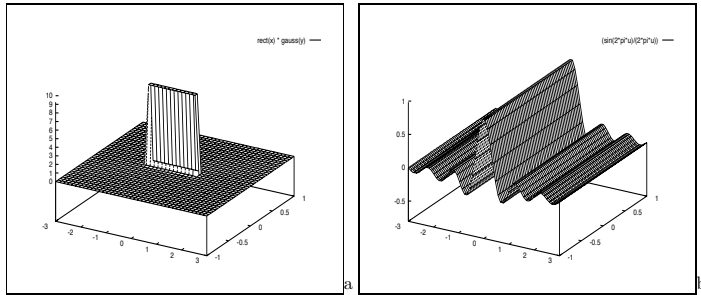
$$g(x, y) = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} f(x - x_o(u), y - y_o(u)) du$$

- Le système ainsi défini est un système LIT de réponse impulsionnelle :

$$h(x, y) = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \delta(x - x_o(\tau), y - y_o(\tau)) d\tau$$

et de réponse en fréquence :

$$H(\nu_x, \nu_y) = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} e^{-j2\pi(\nu_x x_o(\tau) + \nu_y y_o(\tau))} d\tau$$



Flou de bougé (mvt. uniforme) a : réponse impulsionnelle (approx. de $\delta(y)$) – b : réponse en fréquence

- Cas particulier : mouvement de translation uniforme selon Ox :

$$\begin{bmatrix} x_0(t) \\ y_0(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 t \\ 0 \end{bmatrix}$$

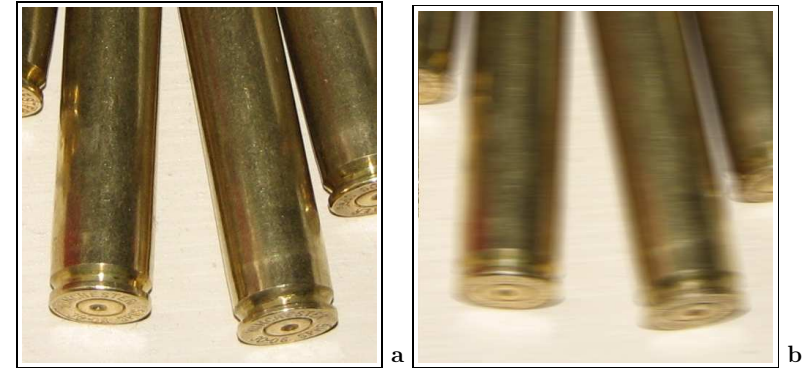
On a alors :

$$\begin{aligned} h(x, y) &= \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \delta(x - v_0 \tau, y) d\tau \\ &= \frac{1}{|v_0|} \text{rect}_{|v_0|\Delta}(x) \delta(y) \end{aligned}$$

où $\text{rect}_\alpha(x)$ est une fonction porte de largeur α .

On en déduit :

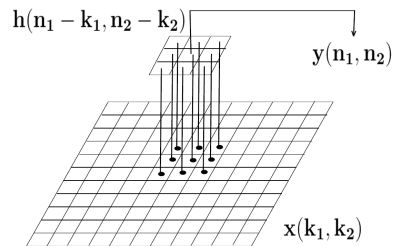
$$H(\nu_x, \nu_y) = \frac{1}{v_0} \frac{\sin(\pi \nu_x v_0 \Delta)}{\pi \nu_x}$$



(a) Image originale, (b) Flou de bougé

III-4

Exemple 3 : Les filtres numériques en imagerie



Système LIT discret = Filtre numérique

- Un filtre numérique de réponse impulsionnelle h peut être décrit par l'équation de convolution :

$$\begin{aligned} y(n_1, n_2) &= \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} x(k_1, k_2) h(n_1 - k_1, n_2 - k_2) \\ &= \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} x(n_1 - k_1, n_2 - k_2) h(k_1, k_2) \end{aligned}$$

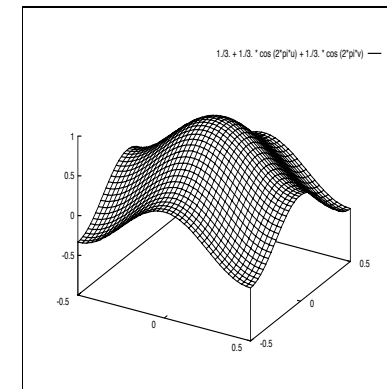
- ▷ Filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF) : h est à support R_h borné et définit un “masque” de convolution :

$$y(n_1, n_2) = \sum_{(k_1, k_2) \in R_h} h(k_1, k_2) x(n_1 - k_1, n_2 - k_2)$$

- ▷ Filtres à réponse impulsionnelle infinie (RII) : h est à support illimité.

III-4

Exemple 3 : Les filtres numériques en imagerie



réponse en fréquence

Exemple de filtre numérique passe-bas :

- Réponse impulsionnelle :

$$h(n_1, n_2) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \end{bmatrix}$$

- Réponse en fréquence :

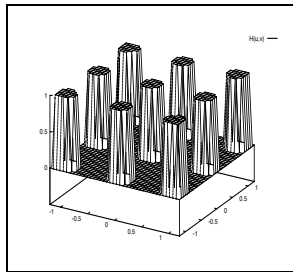
$$H(\nu_1, \nu_2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cos(2\pi\nu_1) + \frac{1}{3} \cos(2\pi\nu_2)$$

III-4

Exemple 3 : Les filtres numériques en imagerie

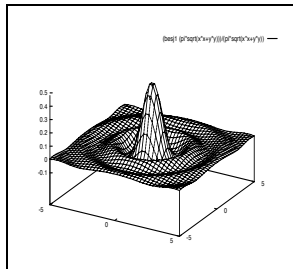
Le filtre numérique passe-bas idéal (à symétrie circulaire) :

- Réponse en fréquence :



$$H(\nu_1, \nu_2) = \begin{cases} 1, & \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2} \leq \nu_c \\ 0, & \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2} > \nu_c \text{ et } |\nu_1|, |\nu_2| \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

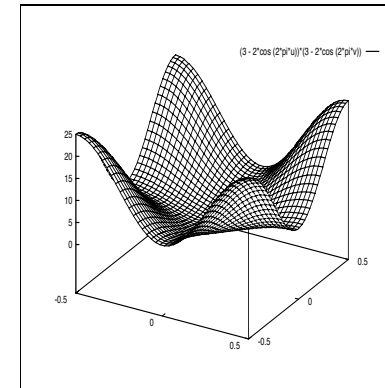
- Réponse impulsionnelle :



$$h(n_1, n_2) = \nu_c \frac{J_1(2\pi\nu_c \sqrt{n_1^2 + n_2^2})}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}}$$

III-4

Exemple 3 : Les filtres numériques en imagerie



réponse en fréquence

Exemple de filtre numérique passe-haut :

- Réponse impulsionnelle :

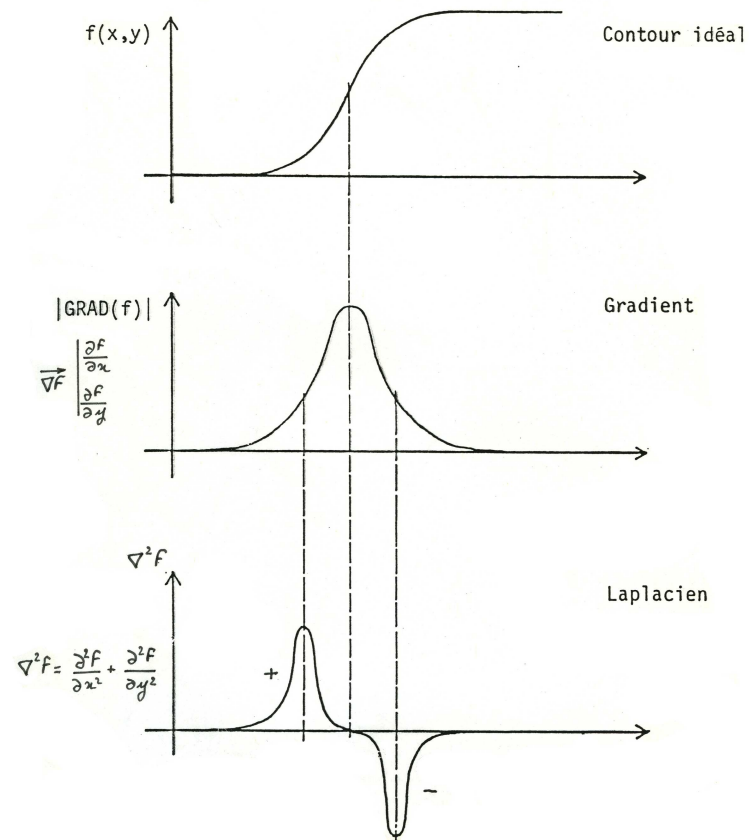
$$h(n_1, n_2) = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 9 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

- Réponse en fréquence :

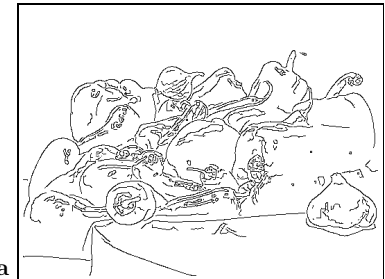
$$H(\nu_1, \nu_2) = (3 - 2 \cos 2\pi\nu_1)(3 - 2 \cos 2\pi\nu_2)$$

III-5

Application I : Détection de contours



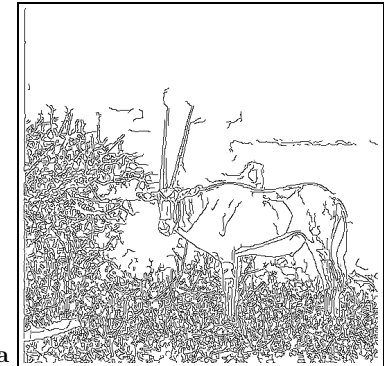
a



b



a



b

(a) Image originale

(b) Détection de contours (filtre de Canny-Deriche)

Source : matlabserver.cs.rug.nl

III-5

Opérateur gradient

Contours = maxima du gradient

$$\text{gradient : } \vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)^T$$

$$\text{module gradient : } \|\vec{\nabla} f\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \simeq \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|$$

$$\text{orientation} \begin{cases} \text{gradient} : \Phi = \arctan\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}}\right) \\ \text{contour} : \Theta = \frac{\pi}{2} - \Phi \end{cases}$$

- Préfiltrage passe-bas pour atténuer le bruit
- Calcul du gradient = filtre passe-haut
 - ▷ approximations discrètes du gradient :

$$\frac{\partial f}{\partial x} \simeq f(n_1, n_2) - f(n_1 - 1, n_2) \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{h_x(-n_1, -n_2)}$$

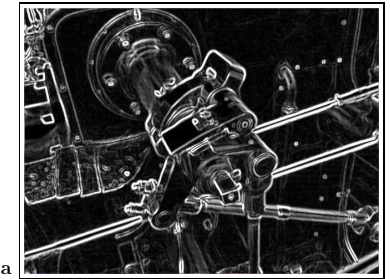
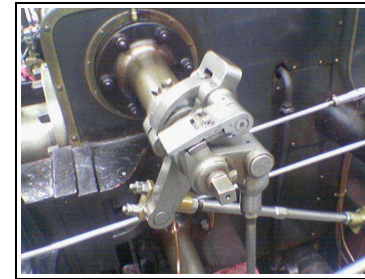
$$\frac{\partial f}{\partial y} \simeq f(n_1, n_2) - f(n_1, n_2 - 1) \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{h_y(-n_1, -n_2)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \simeq \frac{1}{2}[f(n_1 + 1, n_2) - f(n_1 - 1, n_2)] \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \simeq \frac{1}{2}[f(n_1, n_2 + 1) - f(n_1, n_2 - 1)] \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

▷ Autres opérateurs discrets :

$$\begin{aligned} \text{Prewitt [70]} \rightarrow h_x(-n_1, -n_2) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ h_y(-n_1, -n_2) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \\ \text{Sobel} \rightarrow h_x(-n_1, -n_2) &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ h_y(-n_1, -n_2) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \\ \text{Kirsh [71]} \rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ -3 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}}_{h_0} \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 5 & -3 \\ 5 & 0 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}}_{h_1} \dots \underbrace{\begin{bmatrix} -3 & 5 & 5 \\ -3 & 0 & 5 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}}_{h_7} \\ \text{gradient} &= \max_{i=0, \dots, 7} |h_i * f| \end{aligned}$$



(a) Image originale
(b) Norme du gradient (filtre de Sobel)

Source : wikimedia (Simpsons contributor)

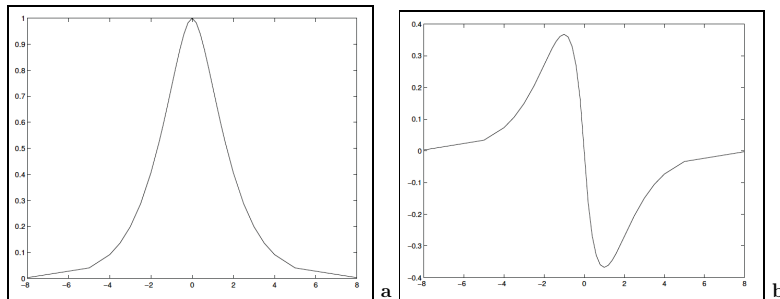
• Filtrage optimal :

- ▷ modèle de contour : échelon + bruit
- ▷ filtre sous contraintes : bonne détection, bonne localisation, pas de détections multiples.
- ▷ Canny-Deriche [87]

$$\text{gradient en } x : h_x(x, y) = \underbrace{-\frac{\alpha^3}{4} x \exp(-\alpha|x|)}_{\text{dérivation}} \underbrace{[\alpha|y| + 1] \exp(-\alpha|y|)}_{\text{lissage}}$$

$$\text{gradient en } y : h_y(x, y) = \underbrace{-\frac{\alpha^3}{4} y \exp(-\alpha|y|)}_{\text{dérivation}} \underbrace{[\alpha|x| + 1] \exp(-\alpha|x|)}_{\text{lissage}}$$

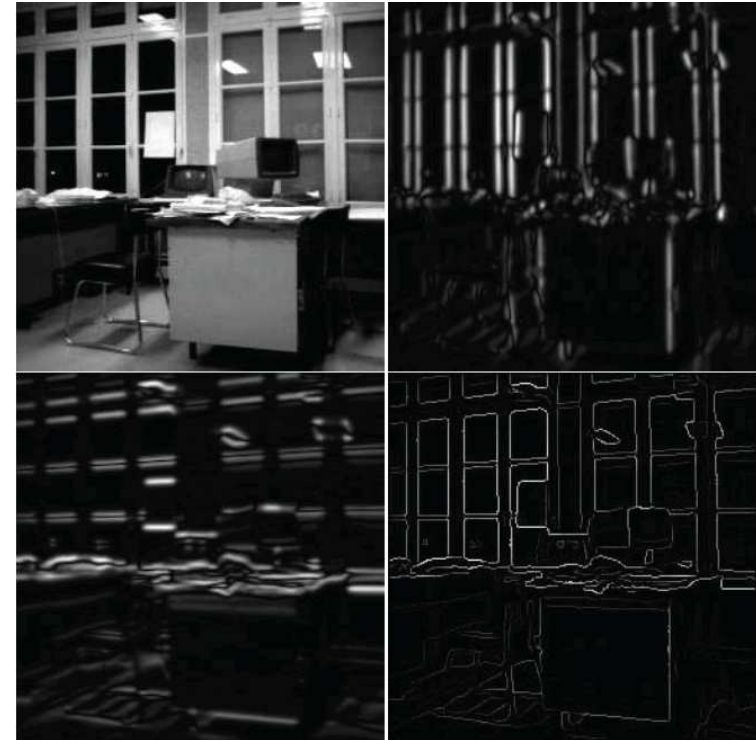
- ▷ Shen-Castan [92] ...



(a) Filtre de Canny-Deriche (lissage) (b) Filtre de Canny-Deriche (dérivation) Source : E. Boyer (UFRIMA)

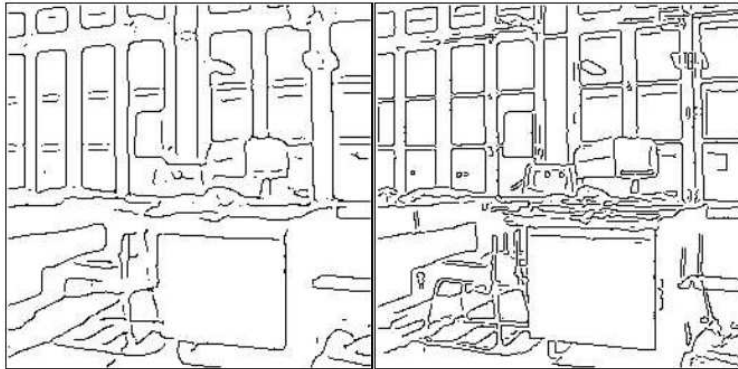
• Détection des maxima du module du gradient :

- ▷ extraction des maxima locaux de la norme du gradient dans la direction du gradient (suppression des non maxima)
- ▷ seuillage simple (un seul seuil);
- ▷ ou : seuillage par hystérésis : 2 seuils (seuil bas + conservation de toutes les chaînes de contours ayant au moins un point \geq seuil haut).



(a) : image originale, (b) : gradient en x (filtre de Deriche), (c) gradient en y (filtre de Deriche), (d) maxima locaux de la norme du gradient dans la direction du gradient.

Source : E. Boyer (UFRIMA)



Seuillages des extrema locaux pour différentes valeurs du paramètre du filtre de Deriche : (a) $\alpha = 0.5$, (b) $\alpha = 1.5$.

Source : E. Boyer (UFRIMA)



a



b



c



d

Seuillage avec hystéresis :

- a) Gradients de Canny-Deriche
- b) Seuillage simple
- c) Double seuil (bas et haut)
- d) Seuillage avec hysteresis

source : ImageJ

III-5

Opérateur laplacien

Contours = passage par zéro du laplacien

$$\text{Laplacien : } \nabla^2 f = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Opérateur isotrope *invariant par rotation*

Les passages par zéro du laplacien forment des *courbes fermées*

- Préfiltrage passe-bas pour atténuer le bruit
- Calcul du laplacien = filtre passe-bande

▷ Approximations discrètes du laplacien :

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

▷ Approche de Marr-Hildreth (1980)

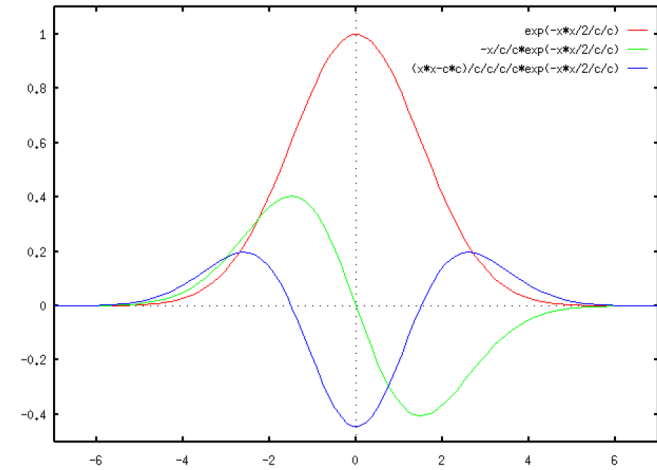
* opérateur laplacien: $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$

* préfiltrage par une gaussienne : $g(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right]$

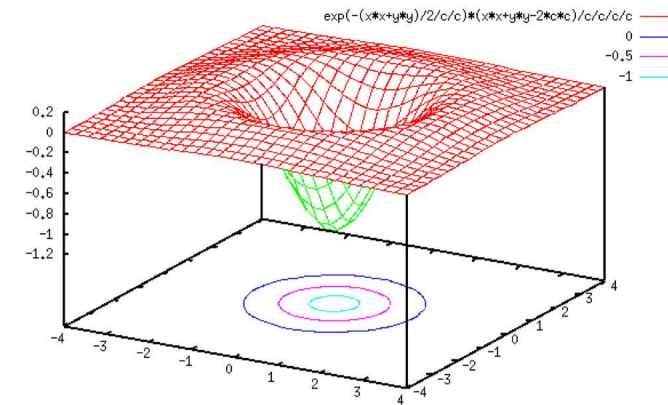
* préfiltrage + opérateur laplacien = opérateur **LOG**

$$\nabla^2 [g(x, y) * f(x, y)] = \underbrace{\nabla^2 g(x, y)}_{\text{LOG}} * f(x, y)$$

versions **LOG** : *laplacian of gaussian*
 approchées **DOG** : *difference of gaussians*
DOB : *difference of boxes*



(a)



(b)

a) Dérivées de la fonction gaussienne 1D
 b) Laplacien de la gaussienne (2D)

source : Ruye Wang, HM College, <http://fourier.eng.hmc.edu/e161/lectures/gradient/node9.html>



Détection de contour par filtre LoG :

Image originale - Image du laplacien et des passages par zéro ($\sigma = 1, 2, 3$).

source : HIPR2 <http://homepages.inf.ed.ac.uk/rbf/HIPR2/zeros.htm>

III-5

Opérateur laplacien : filtrage optimal

▷ Filtrage optimal : modèle de contour + optimisation du filtre sous contraintes (bonne détection, bonne localisation, pas de détections multiples)

* Canny-Deriche [87] : lissage + opérateur laplacien

$$h_{\nabla^2}(x, y) = \exp(-\alpha|x|) \exp(-\alpha|y|) - k \alpha |x| \exp(-\alpha|x|) \alpha |y| \exp(-\alpha|y|)$$

* Shen-Castan [92] ...

- Détection des passages par zéro du laplacien = contours
- Seuillage final (facultatif) : en calculant le gradient aux points contours
 - ▷ seuillage simple (un seul seuil);
 - ▷ seuillage par hystérésis (seuil bas + conservation de toutes les chaînes ayant au moins un point \geq seuil haut).

Pour plus de détails, voir : J.-P. Cocquerez et S. Philipp, "Analyse d'images : filtrage et segmentation", Masson, Paris, 1995.

III-6

Application II : la restauration d'images



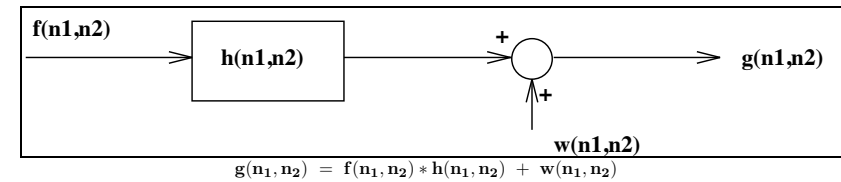
Restauration d'un flou de bougé

Source : Qi Shan, Jiaya Jia, Aseem Agarwala (Siggraph 2008)

- L'objectif de la restauration d'images est de réduire (voire d'éliminer) les dégradations subies par une image.
- Les dégradations peuvent être déterministes et/ou aléatoires (bruit).
- La restauration d'images s'appuie sur un modèle mathématique du système ayant dégradé l'image et sur des connaissances *a priori* sur les propriétés statistiques du bruit.

III-6

Modèle linéaire de dégradation



Modèle de dégradation

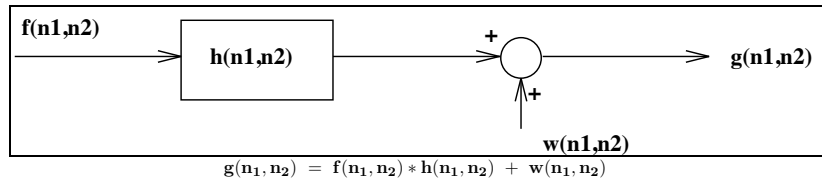
f : image (idéale) avant dégradation.
 g : image dégradée (observée)
 h : réponse impulsionnelle du système de dégradation (généralement filtre passe-bas)
 w : bruit additif.

Ce modèle permet de traiter :

- la réponse en fréquence non uniforme d'un capteur ou d'un système optique (FTM) ;
- un flou de bougé de caméra ;
- un flou de défocalisation ;
- les turbulences atmosphériques en imagerie astronomique...

III-6

Le problème de la restauration



Modèle de dégradation

Retrouver f à partir de l'image observée (dégradée) g .
En pratique on obtient une estimée \hat{f} de f .

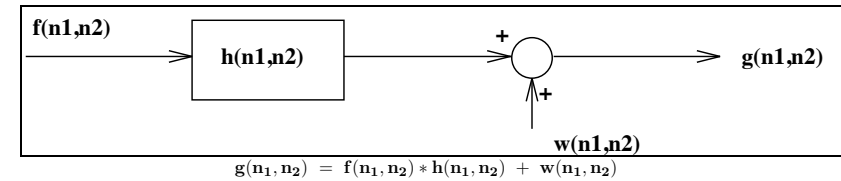
- On suppose connaître $h(n_1, n_2)$ ou $H(\nu_1, \nu_2) = \mathcal{F}[h(n_1, n_2)]$.
- Ce problème est un problème de déconvolution
= *problème inverse « mal posé »* :
 - ▷ pas de solution unique ;
 - ▷ solutions non stables (une petite perturbation sur g peut perturber fortement \hat{f}),
 - ▷ solutions sensibles au bruit.

⇒ nombreuses méthodes de restauration.

- La restauration peut se faire par voie analogique (optique) ou numérique.

III-6

Le filtre inverse (déconvolution seule)



Modèle de dégradation

En l'absence de bruit ($w(n_1, n_2) = 0$), on a (si $H(\nu_1, \nu_2) \neq 0$) :

$$G(\nu_1, \nu_2) = F(\nu_1, \nu_2) \cdot H(\nu_1, \nu_2)$$

soit : $F(\nu_1, \nu_2) = \left[\frac{1}{H(\nu_1, \nu_2)} \right] \cdot G(\nu_1, \nu_2)$

- Filtre inverse :

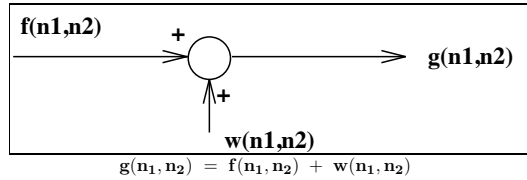
$$H_{\text{inv}}(\nu_1, \nu_2) = \frac{1}{H(\nu_1, \nu_2)}$$

- Limitations (fortes) :

- ▷ n'existe que si $H(\nu_1, \nu_2) \neq 0$
- ▷ inutilisable s'il y a du bruit :
 - H : passe-bas
 - $\frac{1}{H}$: passe-haut = accentuation très importante du bruit (pour $|H(\nu_1, \nu_2)| \simeq 0$).

III-6

Le filtre de Wiener (débruitage seul)



• Hypothèses :

- ▷ f et w sont des processus aléatoires stationnaires, centrés, non corrélés ;
- ▷ les densités spectrales de puissance (d.s.p.) $S_f(\nu_1, \nu_2)$ et $S_w(\nu_1, \nu_2)$ de f et w sont connues.

• Filtrage “optimal” du bruit : le filtre de Wiener.

Le filtre de Wiener est le filtre de réponse impulsionnelle h_w qui minimise l’erreur quadratique moyenne (EQM) :

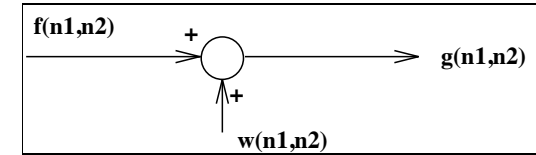
$$\begin{aligned} \hat{f}(n_1, n_2) &= g(n_1, n_2) * h_w \\ \mathbb{E}[(f(n_1, n_2) - \hat{f}(n_1, n_2))^2] &\text{ minimum} \end{aligned}$$

• Réponse en fréquence du filtre de Wiener :

$$H_w(\nu_1, \nu_2) = \frac{1}{1 + \frac{S_w(\nu_1, \nu_2)}{S_f(\nu_1, \nu_2)}}$$

III-6

Le filtre de Wiener (débruitage seul)



$$H_w(\nu_1, \nu_2) = \frac{1}{1 + \frac{S_w(\nu_1, \nu_2)}{S_f(\nu_1, \nu_2)}}$$

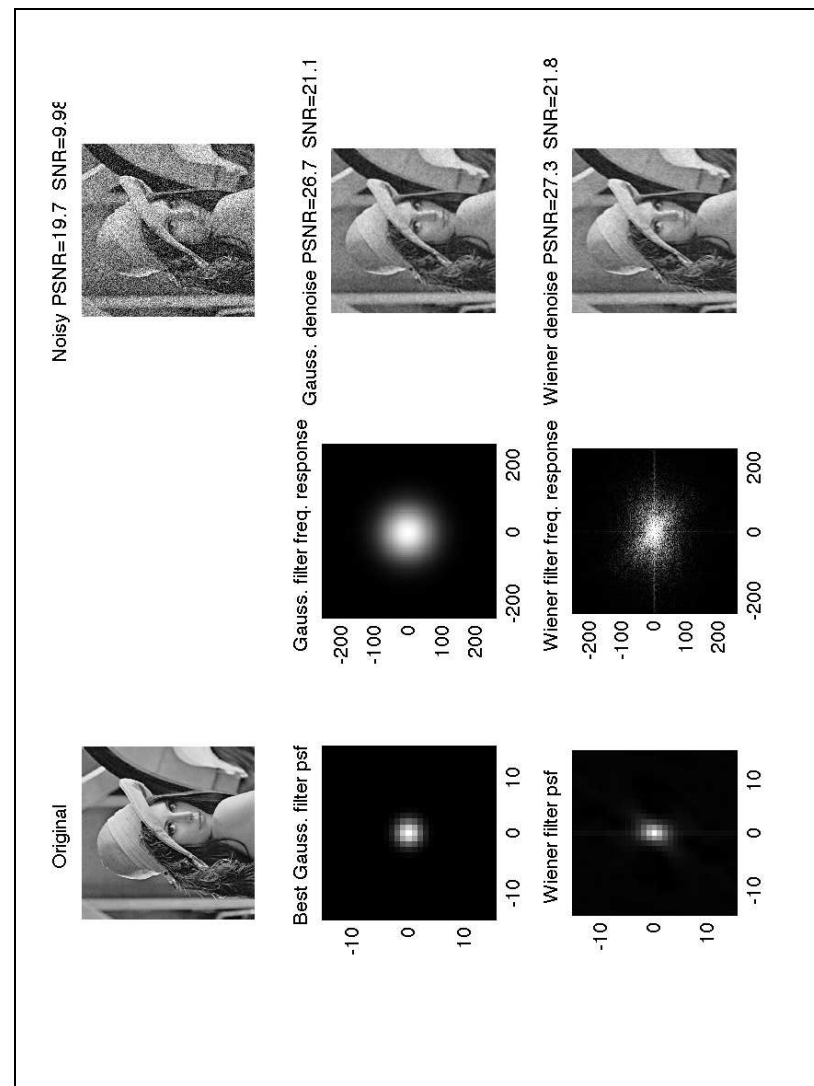
- Si l’image n’est pas centrée (i.e. de moyenne nulle) il faut préalablement soustraire la moyenne $\mathbb{E}[g] = \mathbb{E}[f] + \mathbb{E}[w]$. En pratique on estime $\mathbb{E}[g]$ par la moyenne locale dans une fenêtre (ergodicité).
- Si $\mathbb{E}[w] = 0$, $\mathbb{E}[f] \simeq \mathbb{E}[g]$.
- Si le bruit est blanc $S_w(\nu_1, \nu_2) = \sigma_w^2 = \text{constante}$
- L’estimation de $S_f(\nu_1, \nu_2)$ est parfois difficile :
 - ▷ On peut prendre une base d’images exemples non bruitées et moyenner leur spectre de puissance.
 - ▷ On peut utiliser un modèle pour S_f :

$$\begin{aligned} R_f(n_1, n_2) &= \rho^{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} & 0 < \rho < 1 \\ S_f(\nu_1, \nu_2) &= \mathcal{F}[R_f(n_1, n_2)] \end{aligned}$$

où R_f est la fonction d’autocorrélation de f .

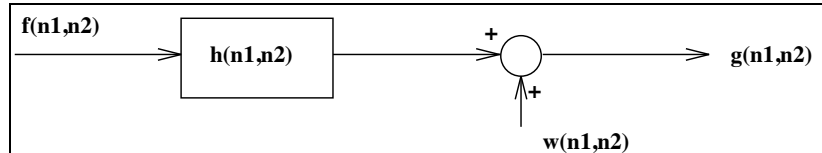


(a) Image originale, (b) Image bruitée (bruit blanc gaussien), (c) Filtre gaussien, (d) Filtre optimal de Wiener



III-6

Le filtre de Wiener (déconvolution + débruitage)



• Hypothèses :

- ▷ f et w sont des processus aléatoires stationnaires, centrés, non corrélés ;
- ▷ les densités spectrales de puissance (d.s.p.) $S_f(\nu_1, \nu_2)$ et $S_w(\nu_1, \nu_2)$ de f et w sont connues.

• Restauration “optimale” : le filtre de Wiener.

Le filtre de Wiener est le filtre de réponse impulsionnelle h_w qui minimise l'erreur quadratique moyenne (EQM) :

$$\hat{f}(n_1, n_2) = g(n_1, n_2) * h_w$$

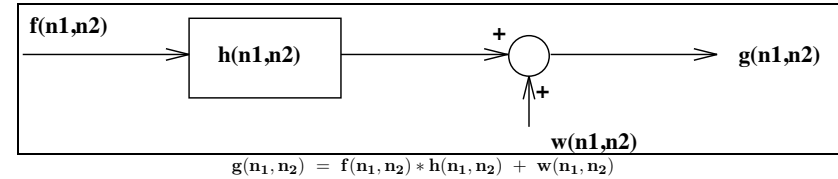
$$\mathbb{E}[(f(n_1, n_2) - \hat{f}(n_1, n_2))^2] \text{ minimum}$$

• Réponse en fréquence du filtre de Wiener :

$$H_w(\nu_1, \nu_2) = \frac{H^*(\nu_1, \nu_2)}{|H(\nu_1, \nu_2)|^2 + \frac{S_w(\nu_1, \nu_2)}{S_f(\nu_1, \nu_2)}}$$

III-6

Le filtre de Wiener (déconvolution + débruitage)



Interprétation du filtre de Wiener :

• Autre expression du filtre :

Posons $r(n_1, n_2) = f(n_1, n_2) * h(n_1, n_2)$,

$$\begin{aligned} H_w(\nu_1, \nu_2) &= \frac{H^*(\nu_1, \nu_2)}{|H(\nu_1, \nu_2)|^2 + \frac{S_w(\nu_1, \nu_2)}{S_f(\nu_1, \nu_2)}} \\ &= \frac{|H(\nu_1, \nu_2)|^2 \cdot S_f(\nu_1, \nu_2)}{|H(\nu_1, \nu_2)|^2 \cdot S_f(\nu_1, \nu_2) + S_w(\nu_1, \nu_2)} \cdot \frac{1}{H(\nu_1, \nu_2)} \\ &= \frac{S_r(\nu_1, \nu_2)}{S_r(\nu_1, \nu_2) + S_w(\nu_1, \nu_2)} \cdot \frac{1}{H(\nu_1, \nu_2)} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{S_w(\nu_1, \nu_2)}{S_r(\nu_1, \nu_2)}} \cdot \frac{1}{H(\nu_1, \nu_2)} \end{aligned}$$

= cascade d'un filtre optimal du bruit sur $r(n_1, n_2)$ et d'un filtre inverse.

• Quand $\frac{S_w(\nu_1, \nu_2)}{S_r(\nu_1, \nu_2)} \ll 1$ $H_w(\nu_1, \nu_2) \rightarrow \frac{1}{H(\nu_1, \nu_2)}$

Quand $\frac{S_w(\nu_1, \nu_2)}{S_r(\nu_1, \nu_2)} \gg 1$ $H_w(\nu_1, \nu_2) \rightarrow 0$



a



b



c

(a) Image originale, (b) Flou de bougé (c) Restauration par filtre de Wiener

PARTIE IV

NUMÉRISATION DES SIGNAUX 2D ET DES IMAGES

IV

Passage continu – discret



De nombreux signaux discrets 2D, et en particulier les images numériques sont obtenues par numérisation de signaux 2D analogiques.

Intérêt de la représentation numérique :

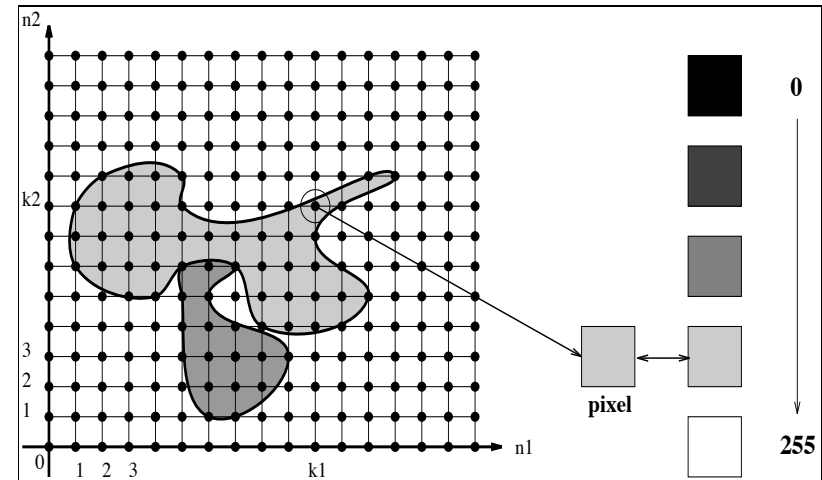
- souplesse et pérennité du stockage des données ;
- duplication et transmission aisée des données ;
- possibilité de traitements numériques sophistiqués.

La numérisation d'un signal 2D continu $f_c(x, y)$ passe par :

- une discrétisation des variables d'espace :
 $(x, y) \Rightarrow (n_1, n_2)$: échantillonnage spatial
- une discrétisation des amplitudes f_c :
quantification des valeurs (de niveaux de gris).

IV

Passage continu – discret

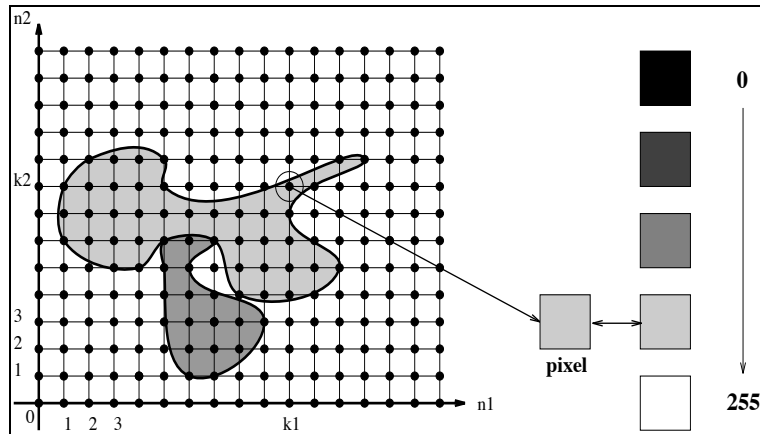


Ces deux opérations sont assurées en pratique par des dispositifs d'acquisition d'images assurant la conversion analogique/numérique :

- capteur : grandeur physique (flux d'énergie)
→ signal (électrique, ...).
- échantillonnage spatial 2D : dispositif de balayage (mécanique, électronique), barettes ou matrices CCD-CMOS.
- quantification des valeurs mesurées (CAN).

IV

Perte d'information



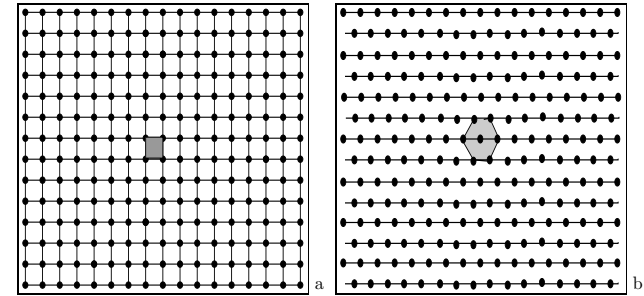
Le passage du signal analogique $f_c(x, y)$ au signal numérique $f(n_1, n_2)$ (par échantillonnage - quantification), se traduit, en général, par une perte d'information.

Perte d'information liée :

- à la quantification : bruit non visible si on adopte 8 bits = 256 niveaux pour une image monochrome, 3x8 bits = 16M de couleurs.
- à l'échantillonnage spatial : pas de perte si échantillonnage suffisamment "fin" et spectre du signal analogique de support borné (rarement vérifié).

IV-1

Échantillonnage idéal des signaux 2D



L'échantillonnage spatial est défini comme le passage :

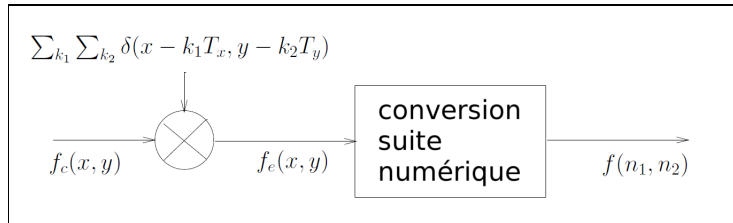
$$f_c(x, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2 \rightarrow f(n_1, n_2), (n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^2$$

Deux trames (grilles) d'échantillonnage sont principalement utilisées en imagerie :

- trame 2D rectangulaire ou carrée (a) ;
- trame hexagonale (b).

IV-1

Échantillonnage idéal



- Trame rectangulaire (périodes = pas d'échantillonnage : T_x, T_y) :

$$f_c(x, y) \rightarrow f(n_1, n_2) = f_c(x, y) \Big|_{(x, y) = (n_1 T_x, n_2 T_y)}$$

- Représentation mathématique :

$$\begin{aligned} f_e(x, y) &= f_c(x, y) \cdot \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} \delta(x - k_1 T_x, y - k_2 T_y) \\ &= \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} f_c(k_1 T_x, k_2 T_y) \delta(x - k_1 T_x, y - k_2 T_y) \end{aligned}$$

$f_e(x, y)$ est un signal analogique constitué d'un peigne d'impulsions de Dirac 2D, pondérées par les valeurs des échantillons du signal.

$f_e(x, y)$ contient les mêmes informations que le signal discret $f(n_1, n_2)$. C'est un intermédiaire mathématique commode pour étudier la perte d'information liée à l'échantillonnage.

IV-1

Échantillonnage idéal

L'échantillonnage du signal analogique $f_c(x, y)$ s'exprime très simplement dans le domaine de Fourier. Il se traduit par une périodisation du spectre de $f_c(x, y)$.

$$\begin{aligned} f_e(x, y) &= f_c(x, y) \cdot \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} \delta(x - k_1 T_x, y - k_2 T_y) \end{aligned}$$

conduit à :

$$\begin{aligned} F_e(\nu_x, \nu_y) &= F_c(\nu_x, \nu_y) * \frac{1}{T_x T_y} \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} \delta(\nu_x - \frac{k_1}{T_x}, \nu_y - \frac{k_2}{T_y}) \end{aligned}$$

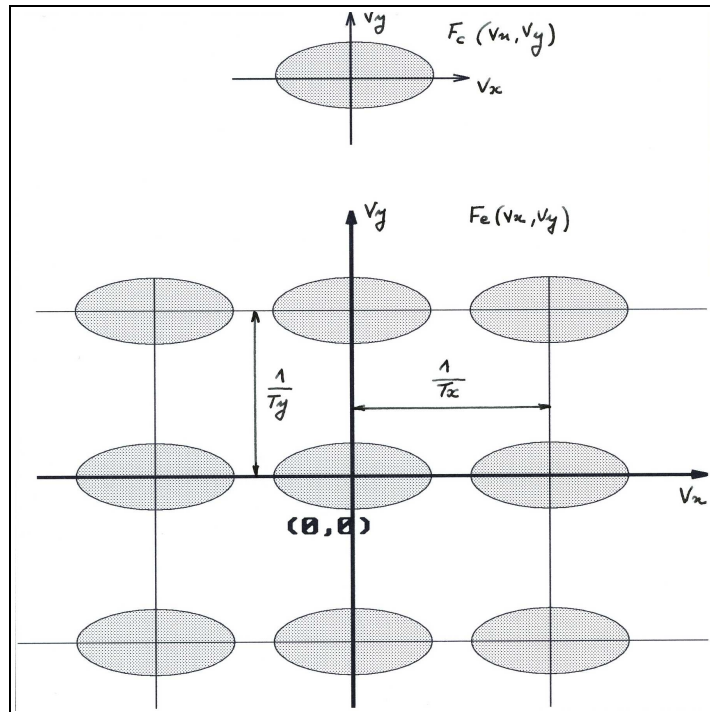
soit (résultat important) :

$$F_e(\nu_x, \nu_y) = \frac{1}{T_x T_y} \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} F_c(\nu_x - \frac{k_1}{T_x}, \nu_y - \frac{k_2}{T_y})$$

Le spectre $F_e(\nu_x, \nu_y)$ du signal échantillonné $f_e(x, y)$ est obtenu par périodisation du spectre $F_c(\nu_x, \nu_y)$ du signal initial $f_c(x, y)$. Les périodes dans le domaine des fréquences sont égales aux inverses des pas d'échantillonnage : $(\frac{1}{T_x}, \frac{1}{T_y})$.

IV-1

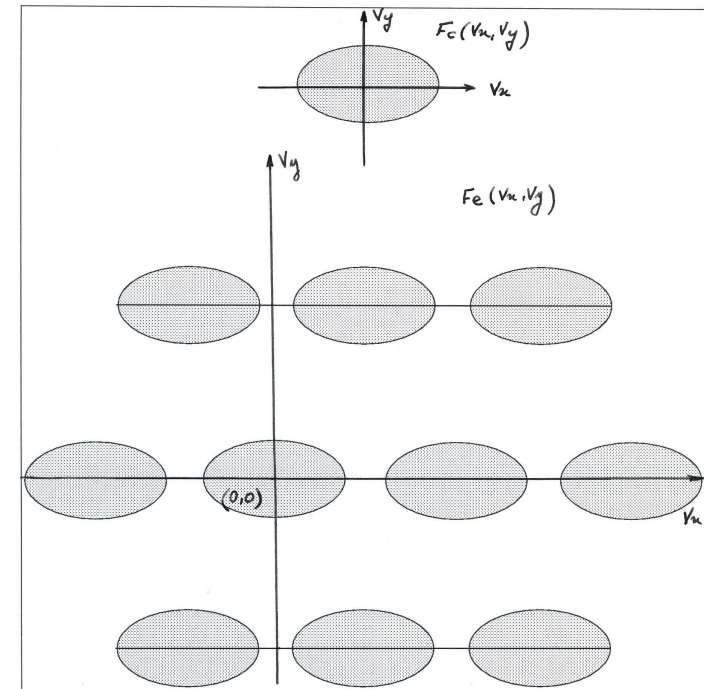
Échantillonnage idéal



Spectre d'un signal échantillonné sur une trame rectangulaire

IV-1

Échantillonnage idéal



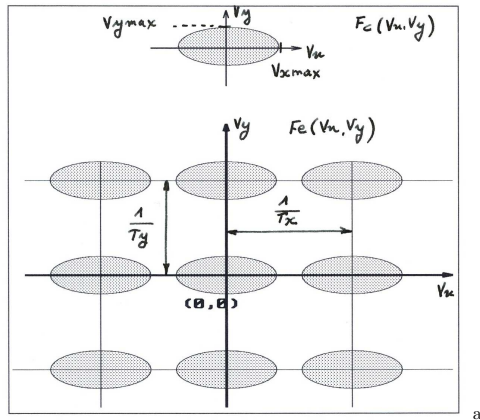
Spectre d'un signal échantillonné sur une trame hexagonale

L'échantillonnage sur grille hexagonale est plus "efficace" que l'échantillonnage sur grille rectangulaire, pour des signaux avec un spectre à support circulaire.

IV-1

Théorème d'échantillonnage

Différentes situations (trame rectangulaire) :



1. Le spectre du signal f_c est borné :

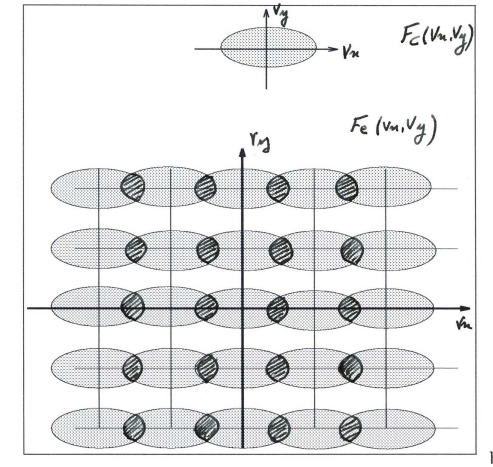
$$F_c(\nu_x, \nu_y) = 0 \text{ pour } |\nu_x| > \nu_{x \max} \text{ ou } |\nu_y| > \nu_{y \max}$$

(a) Si l'échantillonnage est suffisamment "fin", càd :

$$\text{si } \begin{cases} \frac{1}{T_x} > 2\nu_{x \max} \\ \frac{1}{T_y} > 2\nu_{y \max} \end{cases}$$

pas de recouvrement entre les spectres périodisés ; pas de perte d'information.

$\nu_{x \max}, \nu_{y \max}$ sont appelées fréquences de Nyquist (ou de Shannon).



(b) Si l'échantillonnage est trop "grossier", càd :

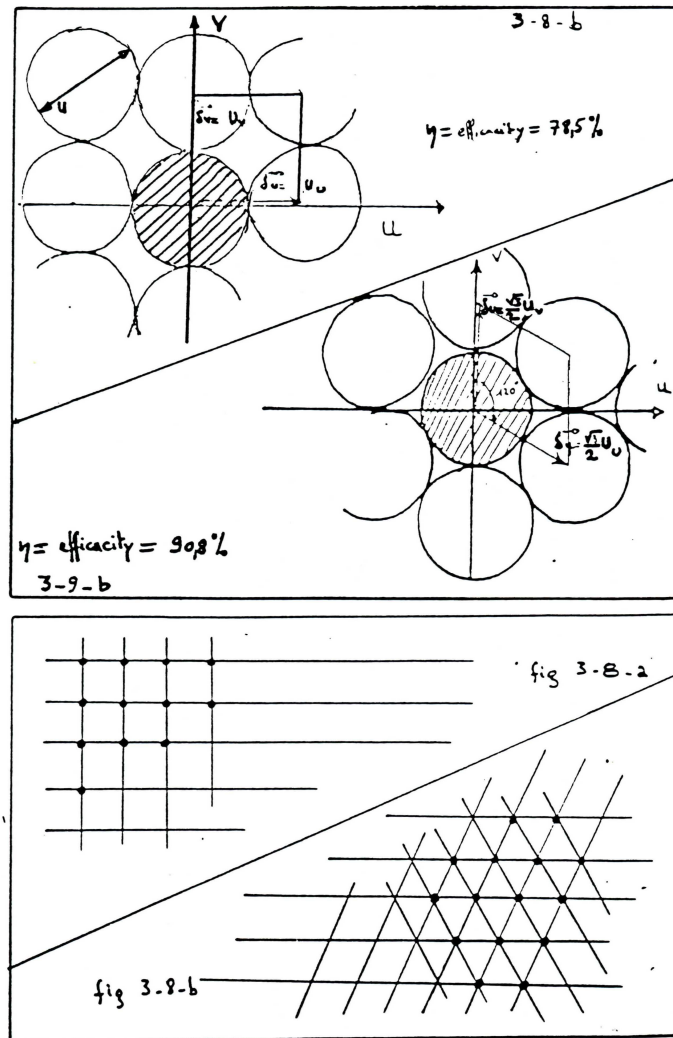
$$\text{si } \begin{cases} \frac{1}{T_x} < 2\nu_{x \max} \\ \frac{1}{T_y} < 2\nu_{y \max} \end{cases} \text{ ou}$$

recouvrement des spectres périodisés, perte d'information.

On parle de recouvrement ou de repliement spectral ("aliasing").

2. Le spectre du signal f_c n'est pas borné :

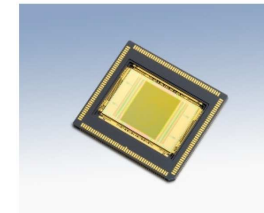
recouvrement entre les spectres périodisés dans tous les cas, perte d'information.



Efficacité des différentes grilles d'échantillonnage (H. Maître, Télécom Paris 1987)

IV-2

Échantillonnage non idéal



- 2560 x 2160 pixels
- 6.5µm x 6.5µm pixel
- Readout noise less than 2 electrons at 30 f/s and less than 3 electrons at 100 f/s
- 100 f/s max at full-res
- Dynamic range: > 16000:1
- QE: >60% at 550 nm
- Rolling- or Global-Shutter readout (user selectable)

sCMOS Fairchild Imaging Sensor

- Différents systèmes sont utilisés :
 - ▷ Microdensitomètre à plat, à tambour.
 - ▷ Scanner
 - ▷ Barettes et matrices CCD, CMOS
- Échantillons non idéaux (mesure non ponctuelle) = intégration de l'intensité dans un (petit) voisinage \mathcal{W} du point échantillonné = filtrage passe-bas du signal

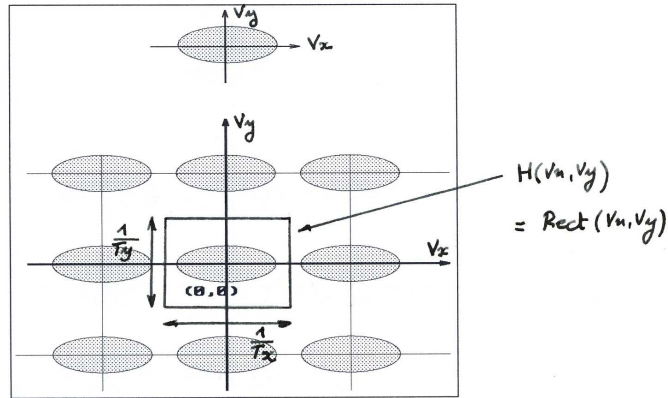
$$\begin{aligned}\tilde{f}_c(x, y) &= \int \int_{\mathcal{W}} f_c(\alpha, \beta) w(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta \\ &= f_c(x, y) * w(x, y)\end{aligned}$$

où w est le profil de la fenêtre \mathcal{W} (gaussienne, etc.), liée à l'ouverture et aux caractéristiques du capteur. w agit comme un filtre passe-bas.

- Tout se passe comme si on échantillonnait idéalement $\tilde{f}_c(x, y)$ de spectre $F_c(\nu_x, \nu_y) \cdot W(\nu_x, \nu_y)$. Ce spectre est moins riche en H.F. que le spectre initial. L'ouverture finie du capteur peut donc jouer le rôle de filtre « anti-aliasing » !

IV-3

Reconstruction par interpolation



Lorsqu'il n'y a pas de repliement spectral, la reconstruction du signal analogique 2D peut s'effectuer sans pertes à partir du signal échantillonné.

Elle s'obtient dans le domaine fréquentiel, par un filtrage passe-bas (= interpolation par des fonctions sinus cardinal 2D).

Soit :

$$Rect(v_x, v_y) = \begin{cases} 1 & \text{pour } \begin{cases} \frac{-1}{2T_x} \leq v_x \leq \frac{1}{2T_x} \\ \frac{-1}{2T_y} \leq v_y \leq \frac{1}{2T_y} \end{cases} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

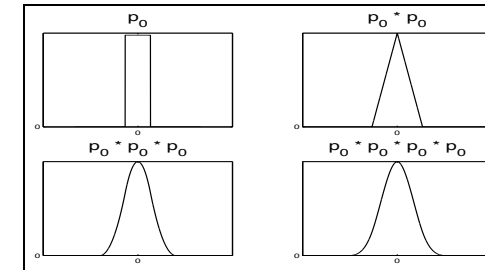
On a :

$$\begin{aligned} f_c(x, y) &= \mathcal{F}^{-1}[T_x T_y F_c(v_x, v_y) Rect(v_x, v_y)] \\ &= \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} f(k_1, k_2) \frac{\sin \frac{\pi}{T_x}(x - k_1 T_x)}{\frac{\pi}{T_x}(x - k_1 T_x)} \frac{\sin \frac{\pi}{T_y}(y - k_2 T_y)}{\frac{\pi}{T_y}(y - k_2 T_y)} \end{aligned}$$

(formule d'interpolation)

IV-3

Reconstruction par interpolation



• Reconstruction parfaite non réalisable : sinus cardinal de support infini !

• Fonctions interpolantes classiques :

▷ disque ;

▷ plus proche voisin (fonction porte $p_0(x) = \text{rect}(x)$, $p(x, y) = p_0(x) p_0(y)$: signal constant par plages) ;

▷ $p_0 * p_0$: interpolation linéaire ;

▷ $p_0 * p_0 * p_0$: quadratique, $p_0 * p_0 * p_0 * p_0$: spline cubique, $\underbrace{p_0 * p_0 * \dots * p_0}_{\infty}$: gaussienne.

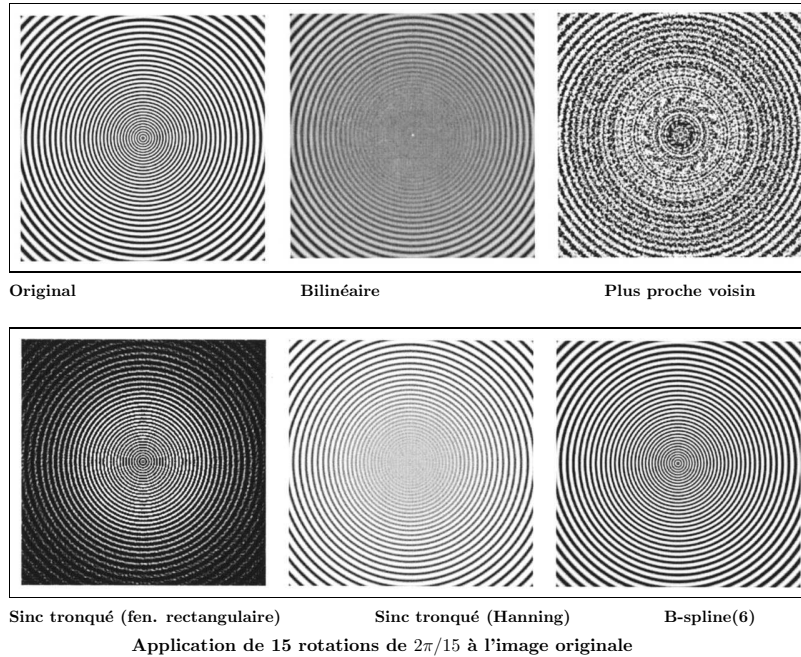
• En pratique interpolation réalisée sur le dispositif d'affichage par :

▷ profil et commande du spot d'affichage (recouvrement entre échantillons) : tubes cathodiques ;

▷ interpolation numérique avant affichage : écrans graphiques, imprimantes ;

▷ trames de points (half-tone) : journaux, magazines, imprimantes.

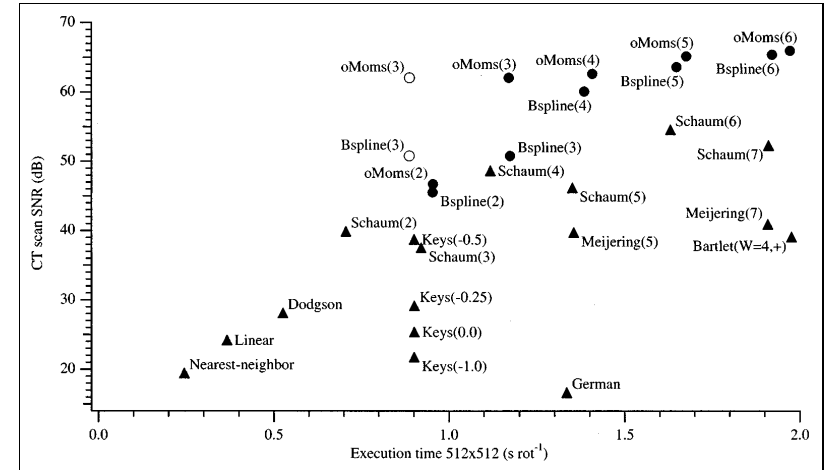
IV-3 Les meilleurs interpolateurs : B-splines (2000)



Référence : P. Thévenaz, T. Blu, M. Unser, *Interpolation Revisited*, IEEE Trans Medical Imaging, Vol. 19, No. 7, July 2000.

Les meilleurs interpolateurs actuels sont les interpolateurs à base de B-splines introduits par Thévenaz, Blu et Unser (EPFL, Lausanne) en 2000. Ces interpolateurs ont la particularité de ne pas être “interpolants”, c’est-à-dire que la fonction interpolée ne coïncide pas exactement avec la fonction de départ sur la grille d’échantillonnage. L’abandon de cette contrainte (imposée dans les interpolateurs classiques), introduit de nouveaux degrés de liberté qui permettent un gain substantiel en qualité.

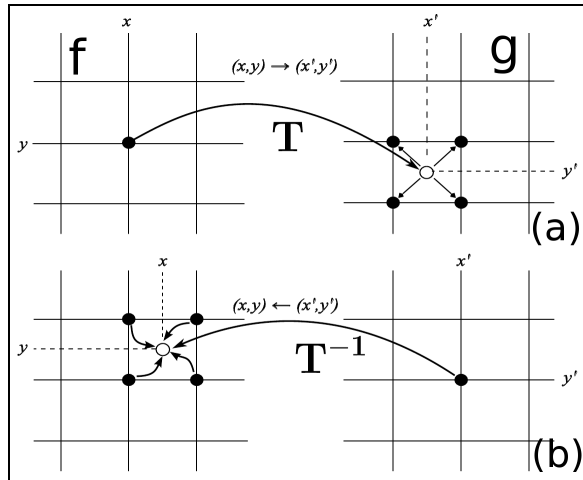
IV-3 Les meilleurs interpolateurs : B-splines (2000)



Comparaison des différents interpolateurs (SNR / temps CPU) Triangles : fonctions interpolantes. Cercle : fonctions non interpolantes

From: P. Thévenaz, T. Blu, M. Unser, *Interpolation Revisited*, IEEE Trans Medical Imaging, Vol. 19, No. 7, July 2000.

IV-4 Transformation géométrique des images numériques



On souhaite appliquer une transformation géométrique T à une image numérique f (T = rotation, zoom, ...).

f : image source, g : image cible.

$(x, y) \xrightarrow{T} (x', y')$ où T est la transformation directe

$(x', y') \xrightarrow{T^{-1}} (x, y)$ où T^{-1} est la transformation inverse.

(a) Utilisation de la transformation directe T (peu utilisé):

$g(T[(x, y)]) = f(x, y)$

▷ parcours de l'image source selon des coordonnées (x, y) entières

▷ "remplissage" de l'image cible

(b) Utilisation de la transformation inverse T^{-1} (recommandé) :

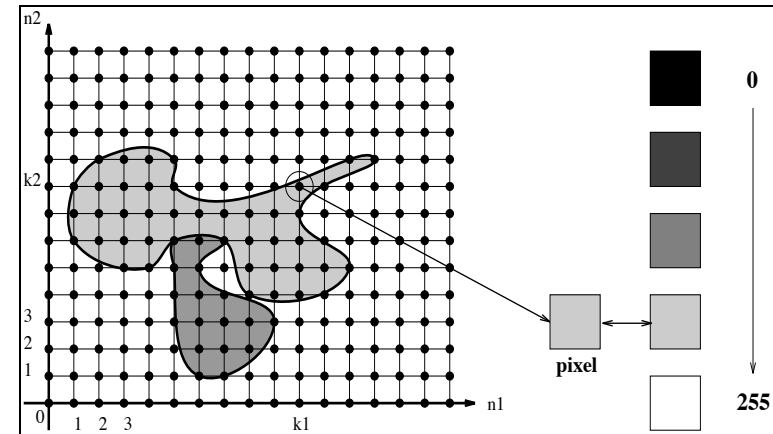
$g(x', y') = f(T^{-1}[(x', y')])$

▷ parcours de l'image cible selon des coordonnées (x', y') entières

▷ la valeur de niveau de gris de l'antécédent du point (x', y') est obtenue *par interpolation*.

IV-5

Quantification des images



• Quantification :

$$\hat{f} = Q(f) = r_i, \quad d_{i-1} < f \leq d_i, \quad i = 1, \dots, L$$

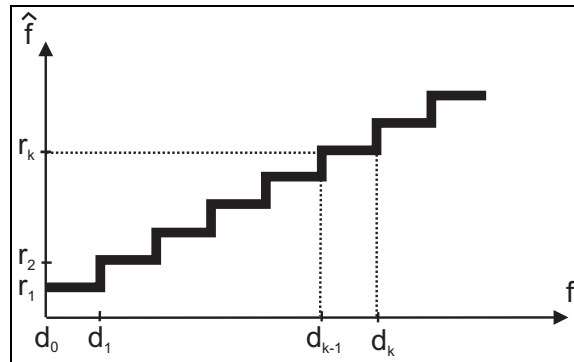
• Erreur de quantification :

$$e_Q = \hat{f} - f$$

• Distorsion moyenne :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e_Q^2] &= \mathbb{E}[(\hat{f} - f)^2] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (Q(u) - u)^2 p_f(u) du \\ &= \sum_{i=1}^L \int_{d_{i-1}}^{d_i} (r_i - u)^2 p_f(u) du \end{aligned}$$

où $p_f(u)$ est la densité de proba. de f .



- Lois de quantification optimales [Lloyd-Max] :

$$\min_{\{r_k, \dots, d_k, \dots\}} D = \min_{\{r_k, \dots, d_k, \dots\}} \sum_{i=1}^L \int_{d_{i-1}}^{d_i} (r_i - u)^2 p_f(u) du$$

$$r_k = \frac{\int_{d_{k-1}}^{d_k} u p_f(u) du}{\int_{d_{k-1}}^{d_k} p_f(u) du}, \quad 1 \leq k \leq L$$

$$d_k = \frac{r_k + r_{k+1}}{2}, \quad 1 \leq k \leq L-1$$

$$d_0 = -\infty, d_L = \infty$$

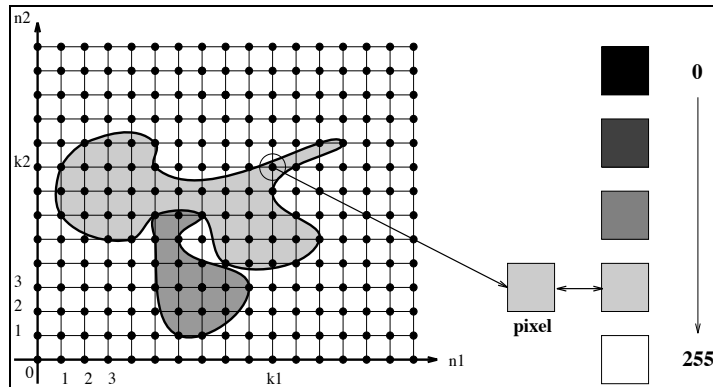
- Habituellement :

- ▷ Numérisation : lois de quantification linéaires (optimale si $p_f(u)$ uniforme, RSB=6dB/bit)
- ▷ En codage, compression : autres densités de proba. (laplaciennes), approximations des lois optimales.

PARTIE V

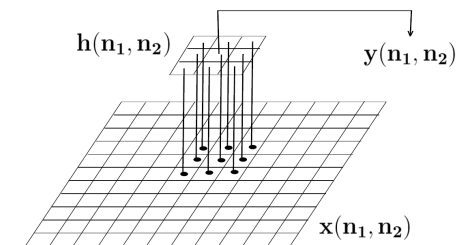
FILTRAGE NUMÉRIQUE DES IMAGES

V	Intérêts du traitement numérique
---	----------------------------------



- Traitement sous une représentation unique (échantillons numériques) du texte, du son et de l'image ;
- Possibilité de traitements numériques très sophistiqués ;
- Souplesse et pérennité du stockage des données ;
- Duplication et transmission aisée des données (réseaux) ;
- Possibilité de compression des données pour augmenter les capacités de stockage et la capacité des canaux de transmission ($>$ analogique)

V	Filtrage numérique
---	--------------------



- Trois étapes dans la mise en œuvre :
 - ▷ Spécification des caractéristiques (idéales) H du filtre souhaité.
 - ▷ Synthèse d'un filtre \hat{H} réalisable et approchant au mieux le filtre H .
 - ▷ Implantation du filtre (sur ordinateur, processeur dédié ou circuit spécifique).
- Implantation :
 - ▷ dans le domaine spatial (convolution discrète) ;
 - ▷ dans le domaine de Fourier (utilisation de la TFD, multiplication, TFD^{-1}).

V-1

La transformée de Fourier discrète (TFD)

La transformée de Fourier discrète (TFD ou DFT) est une approximation de la transformée de Fourier des signaux discrets. Elle est utilisée pour le calcul sur ordinateur.

La transformée de Fourier rapide (TFR ou FFT) est un algorithme rapide de calcul de la TFD.

Rappel : la T.F. des signaux discrets 2D définie par :

$$X(\nu_1, \nu_2) = \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{+\infty} x(n_1, n_2) e^{-j2\pi(n_1\nu_1 + n_2\nu_2)}$$

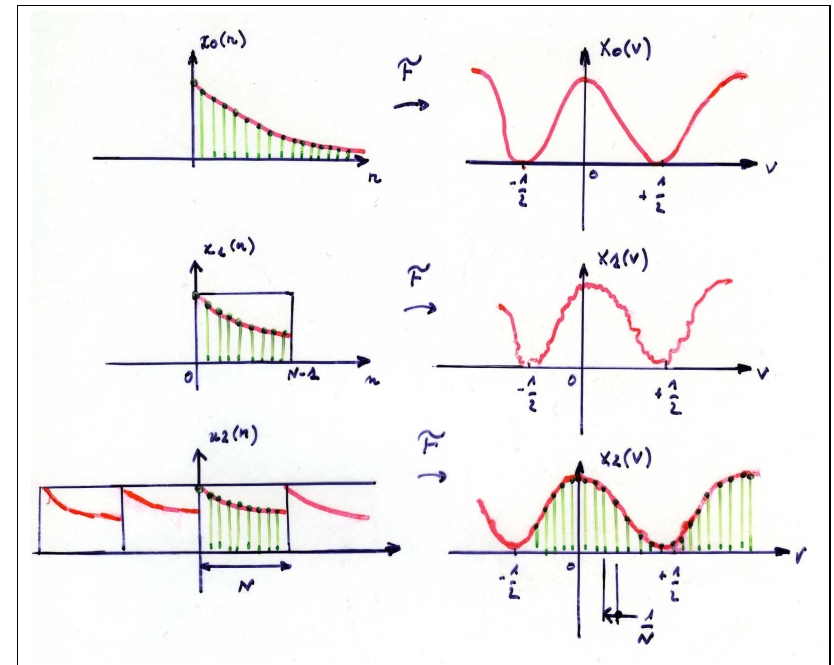
$$x(n_1, n_2) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} X(\nu_1, \nu_2) e^{j2\pi(\nu_1 n_1 + \nu_2 n_2)} d\nu_1 d\nu_2$$

ne peut se calculer directement sur ordinateur car :

- (ν_1, ν_2) sont des variables continues ;
- $\sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{+\infty}$ porte sur un nombre infini de termes.

V-1

La transformée de Fourier discrète (TFD)



De la T.F. à la T.F.D.

V-1	La transformée de Fourier discrète (TFD)
-----	--

- TFD = Approximation de :

$$X(\nu_1, \nu_2) = \sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{+\infty} x(n_1, n_2) e^{-j2\pi(n_1\nu_1 + n_2\nu_2)}$$

par :

- ▷ troncature du signal $x(n_1, n_2)$ sur $\{0, \dots, N_1-1\} \times \{0, \dots, N_2-1\}$ (la somme porte sur un nombre fini de $N_1 \times N_2$ échantillons).
- ▷ Échantillonnage du spectre $X(\nu_1, \nu_2)$ avec un pas d'échantillonnage de $(1/N_1, 1/N_2)$ (sur une période $= [0, 1[\times [0, 1[$).

- Définition :

▷ TFD 2D directe :

$$X(k_1, k_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1, n_2) e^{-j2\pi(\frac{n_1 k_1}{N_1} + \frac{n_2 k_2}{N_2})},$$

$$k_1 = 0, \dots, N_1 - 1 ; k_2 = 0, \dots, N_2 - 1$$

▷ TFD 2D inverse :

$$x(n_1, n_2) = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} X(k_1, k_2) e^{j2\pi(\frac{n_1 k_1}{N_1} + \frac{n_2 k_2}{N_2})},$$

$$n_1 = 0, \dots, N_1 - 1 ; n_2 = 0, \dots, N_2 - 1$$

V-1	La transformée de Fourier discrète (TFD)
-----	--

$$X(k_1, k_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1, n_2) e^{-j2\pi(\frac{n_1 k_1}{N_1} + \frac{n_2 k_2}{N_2})}$$

$$x(n_1, n_2) = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} X(k_1, k_2) e^{j2\pi(\frac{n_1 k_1}{N_1} + \frac{n_2 k_2}{N_2})}$$

-
- TFD = décomposition en série de Fourier d'un signal périodique discret coïncidant avec $x(n_1, n_2)$ sur $\{0, \dots, N_1-1\} \times \{0, \dots, N_2-1\}$.
 - la TFD coïncide avec la T.F. exacte (aux points d'échantillonnage) pour les signaux non périodiques à support borné $\subset \{0, \dots, N_1-1\} \times \{0, \dots, N_2-1\}$. L'échantillonnage de $X(\nu_1, \nu_2)$ ne fait pas perdre d'information dans ce cas : toute l'information sur $x(n_1, n_2)$ est alors contenue dans les échantillons $X(k_1, k_2)$.

V-1	Propriétés de la TFD
-----	----------------------

On considère ici des signaux numériques de même support
 $\{0, \dots, N_1 - 1\} \times \{0, \dots, N_2 - 1\}$

- Linéarité :

$$\text{si } \begin{array}{l} x_1(n_1, n_2) \\ x_2(n_1, n_2) \end{array} \begin{array}{c} \xleftrightarrow{\mathcal{TFD}} \\ \xleftrightarrow{\mathcal{TFD}} \end{array} \begin{array}{l} X_1(k_1, k_2) \\ X_2(k_1, k_2) \end{array}$$

$$\text{alors } \begin{array}{l} a x_1(n_1, n_2) + b x_2(n_1, n_2) \\ \xleftrightarrow{\mathcal{TFD}} a X_1(k_1, k_2) + b X_2(k_1, k_2) \end{array}$$

- Convolution : situation plus complexe que pour la T.F. (convolution circulaire).

▷ soit :

$$\begin{array}{l} x(n_1, n_2) \\ h(n_1, n_2) \end{array} \begin{array}{c} \xleftrightarrow{\mathcal{TFD}} \\ \xleftrightarrow{\mathcal{TFD}} \end{array} \begin{array}{l} X(k_1, k_2) \\ H(k_1, k_2) \end{array}$$

$$Y(k_1, k_2) = H(k_1, k_2) \cdot X(k_1, k_2)$$

▷ $Y(k_1, k_2)$ est la TFD du signal :

$$y(n_1, n_2) = \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \sum_{m_2=0}^{N_2-1} x(m_1, m_2) h([n_1 - m_1]_{N_1}, [n_2 - m_2]_{N_2})$$

$$n_1 = 0, \dots, N_1 - 1 ; n_2 = 0, \dots, N_2 - 1$$

où $[\]_N$ est l'opérateur modulo N .

$y(n_1, n_2)$ n'est pas le produit de convolution de x par h !

C'est un produit de convolution circulaire noté \otimes .

V-1	TFD et produit de convolution
-----	-------------------------------

La relation entrée-sortie d'un système linéaire dans le domaine spatial est un produit de convolution ordinaire. La TFD est associée à une convolution circulaire.

On peut toutefois utiliser la TFD pour calculer une convolution ordinaire, en complétant les signaux par des zéros.

$$\begin{array}{l} x(n_1, n_2) \text{ de support } R_{P_1 \times P_2} = \{0, \dots, P_1 - 1\} \times \{0, \dots, P_2 - 1\} \\ h(n_1, n_2) \text{ de support } R_{Q_1 \times Q_2} \end{array}$$

- Convolution ordinaire :

$$w(n_1, n_2) = \sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{+\infty} x(m_1, m_2) h(n_1 - m_1, n_2 - m_2)$$

- Convolution circulaire sur $N_1 \times N_2$ points :

$$\tilde{w}(n_1, n_2) = \sum_{m_1=0}^{N_1-1} \sum_{m_2=0}^{N_2-1} x(m_1, m_2) h([n_1 - m_1]_{N_1}, [n_2 - m_2]_{N_2})$$

- Si on adopte :

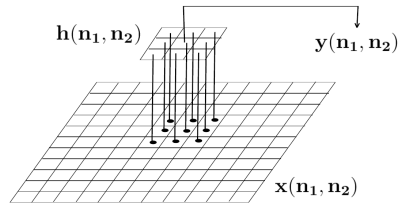
$$N_1 \geq P_1 + Q_1 - 1$$

$$N_2 \geq P_2 + Q_2 - 1$$

(en complétant $x(n_1, n_2)$ et $h(n_1, n_2)$ par des zéros), $\tilde{w}(n_1, n_2)$ coïncide avec $w(n_1, n_2)$ sur $R_{N_1 \times N_2}$

V-1

Calcul de convolution par TFD



$x(n_1, n_2)$ de support $R_{P_1 \times P_2}$

$h(n_1, n_2)$ de support $R_{Q_1 \times Q_2}$

Convolution (ordinaire) de x par h (par TFD) :

1. Choisir N_1 et N_2 vérifiant :

$$N_1 \geq P_1 + Q_1 - 1$$

$$N_2 \geq P_2 + Q_2 - 1$$

2. Ajouter des zéros à $h(n_1, n_2)$ et $x(n_1, n_2)$ de façon à obtenir le même support $R_{N_1 \times N_2}$.

3. TFDs directes sur $N_1 \times N_2$ points :

$$X(k_1, k_2) = \mathcal{TFD}[x(n_1, n_2)]$$

$$H(k_1, k_2) = \mathcal{TFD}[h(n_1, n_2)]$$

4. Faire le produit : $X(k_1, k_2) \cdot H(k_1, k_2)$

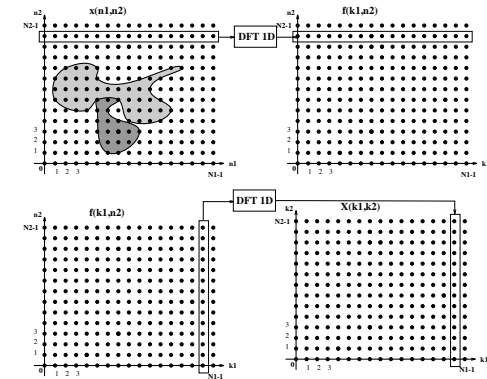
5. TFD inverse sur $N_1 \times N_2$ points :

$$x(n_1, n_2) * h(n_1, n_2) = \mathcal{TFD}^{-1}[X(k_1, k_2) \cdot H(k_1, k_2)]$$

Intérêt : dans certains cas, plus rapide que le calcul direct lorsque la TFR (FFT) est utilisée.

V-1

Complexité de la TFD



Il existe différents algorithmes de calcul de FFT 2D. Les plus classiques consistent à effectuer un grand nombre de FFT 1D sur les lignes et colonnes de l'image.

- Calcul direct de la TFD

$$X(k_1, k_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1, n_2) e^{-j2\pi(\frac{n_1 k_1}{N_1})} e^{-j2\pi(\frac{n_2 k_2}{N_2})}$$

$$k_1 = 0, \dots, N_1 - 1 ; k_2 = 0, \dots, N_2 - 1$$

$N_1^2 \cdot N_2^2$ multiplications complexes

$N_1^2 \cdot N_2^2$ additions complexes

V-1

Complexité de la TFD

• Décomposition ligne-colonne

$$X(k_1, k_2) = \sum_{n_2=0}^{N_2-1} f(k_1, n_2) e^{-j2\pi(\frac{n_2 k_2}{N_2})}$$

avec : $f(k_1, n_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} x(n_1, n_2) e^{-j2\pi(\frac{n_1 k_1}{N_1})}$

Pour n_2 fixé, $f(k_1, n_2)$ est la TFD 1D sur N_1 points de la $n_2^{\text{ème}}$ ligne de l'image (à calculer pour $n_2 = 0, \dots, N_2 - 1$).

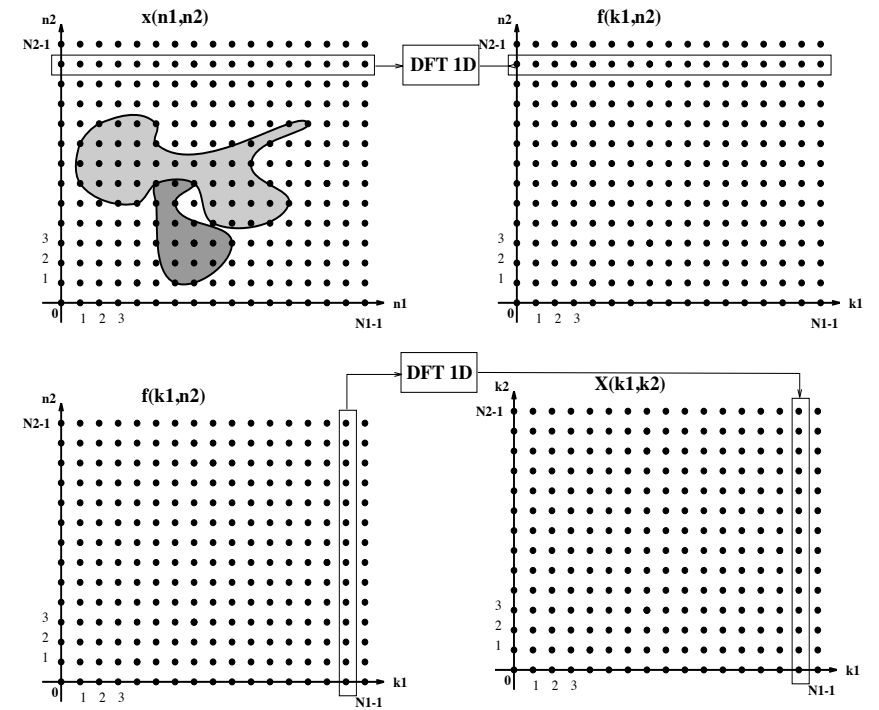
$X(k_1, k_2)$ s'obtient par TFD 1D sur N_2 points de la $k_1^{\text{ème}}$ colonne de $f(k_1, n_2)$ (à calculer pour $k_1 = 0, \dots, N_1 - 1$). Complexité d'une TFD 1D : N^2 mult. + N^2 add.

$N_1 N_2 (N_1 + N_2)$ multiplications complexes

$N_1 N_2 (N_1 + N_2)$ additions complexes

V-1

Décomposition ligne-colonne de la TFD 2D



V-1	Complexité de la TFD
-----	----------------------

• Utilisation de la FFT 1D
 Pour calculer les TFD 1D, on utilise un algorithme de FFT.
 Complexité (Coley-Tukey) ($N = 2^M$) :
 $N/2 \log_2 N$ mult. + $N \log_2 N$ add.
 Pour $N_1 = 2^{M_1}$ et $N_2 = 2^{M_2}$:

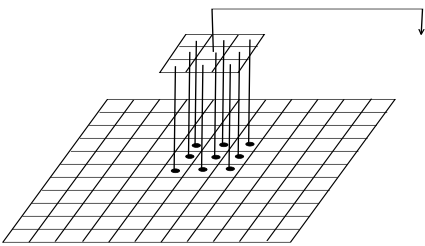
$$\frac{N_1 N_2}{2} \log_2(N_1 N_2) \text{ multiplications complexes}$$

$$N_1 N_2 \log_2(N_1 N_2) \text{ additions complexes}$$

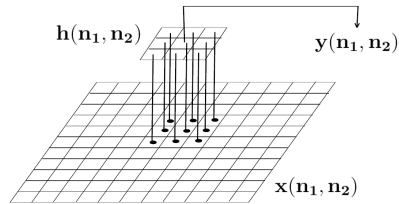
	mult.	add.
calcul direct	1	1
déc. lig-col TFD 1D	1/250	1/250
déc. lig-col FFT 1D	1/30000	1/15000

Complexités comparées ($N_1 = N_2 = 512$)

V-2	Implantation des filtres 2D
-----	-----------------------------



- Implantation :
- dans le domaine spatial (convolution discrète) ;
 - dans le domaine de Fourier (utilisation de la TFD, multiplication, TFD^{-1}).

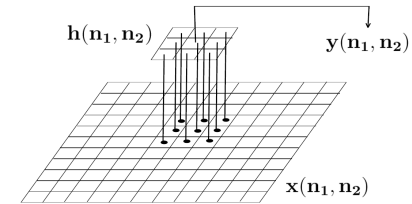


On considère un filtre de réponse impulsionnelle $h(n_1, n_2)$:

$$y(n_1, n_2) = \sum_{k_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{k_2=-\infty}^{+\infty} x(k_1, k_2) h(n_1 - k_1, n_2 - k_2) \quad (1)$$

- Filtres à réponse impulsionnelle finie (RIF) : $h(n_1, n_2)$ est de support borné (souvent petit).
- Filtres à réponse impulsionnelle infinie (RII) : $h(n_1, n_2)$ est de support non limité (ne peuvent s'implanter par l'équation (1)).

Les filtres RII sont assez peu utilisés en imagerie : problèmes théoriques et pratiques (stabilité, ...).



Les filtres construits en traitement des images sont souvent spécifiés à phase nulle. Une phase nulle permet de préserver la forme du signal (donc la structure de l'image) dans la bande passante du filtre. Si le filtre n'est pas à phase nulle, les composantes de fréquence différentes seront déphasées (càd translatées) de manière différente : il y a perte de cohérence au niveau des contours et autres structures de l'image.

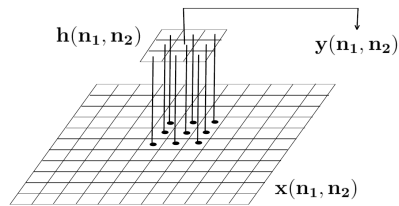
Les filtres RIF présentent l'avantage de pouvoir être facilement spécifiés à phase nulle :

$$\begin{aligned} h(n_1, n_2) &= h(-n_1, -n_2) \\ H(\nu_1, \nu_2) &= H^*(\nu_1, \nu_2) \end{aligned}$$

(symétrie par rapport à l'origine)

V-2

Implantation des RIF (convolution)



Le filtrage est implanté dans le domaine spatial par convolution.

Soit $h(n_1, n_2)$ un filtre RIF (à phase nulle) de support $R_h = R_{Q_1 \times Q_2}$

$$y(n_1, n_2) = \sum_{(k_1, k_2) \in R_h} h(k_1, k_2) x(n_1 - k_1, n_2 - k_2)$$

$$\frac{Q_1 Q_2}{2} \text{ mult. réelles / pel}$$

$$Q_1 Q_2 \text{ add. réelles / pel}$$

Coûteux pour des supports de filtre R_h grands !

V-2

Implantation des RIF (par FFT)

Le filtrage est implanté dans le domaine de Fourier en utilisant la FFT.

$h(n_1, n_2)$ de support $R_h = R_{Q_1 \times Q_2}$

$x(n_1, n_2)$ de support $R_{P_1 \times P_2}$

- Pour l'implantation du filtre dans le domaine de Fourier, il faut calculer des FFTs 2D sur $N_1 \times N_2$ points avec :

$$N_1 \geq P_1 + Q_1 - 1$$

$$N_2 \geq P_2 + Q_2 - 1$$

$$N_1 = 2^{M_1}$$

$$N_2 = 2^{M_2}$$

- Complexité :

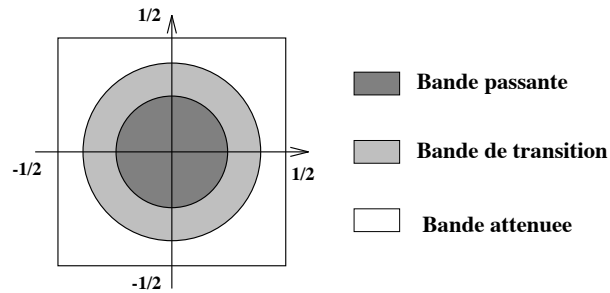
$$\frac{2N_1 N_2 \log_2 N_1 N_2 + 2N_1 N_2}{P_1 P_2} \text{ mult. réelles / pel}$$

- Exemple : $P_1 = P_2 = 1000, N_1 = N_2 = 1024$

filtre	convolution (mult./pel)	FFT 2D (mult./pel)
3×3	5	44
5×5	13	44
7×7	25	44
9×9	41	44
11×11	61	44
13×13	85	44
15×15	113	44

V-3

Éléments sur la synthèse des filtres



Gabarit passe-bas

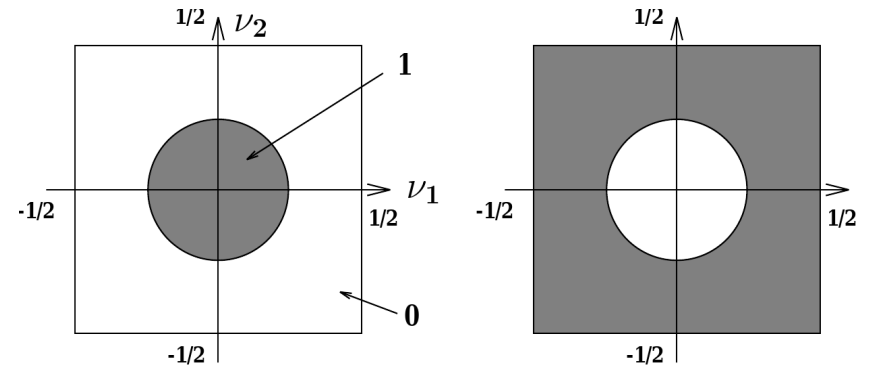
La mise en œuvre d'un filtre numérique en imagerie passe par la synthèse d'un filtre réalisable \hat{H} à partir de la spécification du filtre souhaité H .

Les méthodes de synthèse présentées ci-après concernent les filtres RIF. La synthèse des filtres RII est particulièrement délicate en raison des problèmes de stabilité.

Le filtre sera dit réalisable s'il possède une réponse impulsionnelle finie (dont le support devra être le plus petit possible pour des contraintes de temps de calcul).

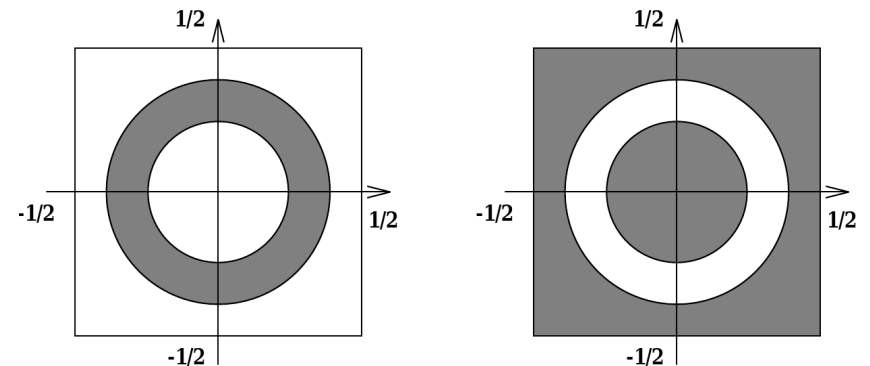
V-3

Réponses en fréquence : filtres 2D idéaux



Filtre passe-bas

Filtre passe-haut

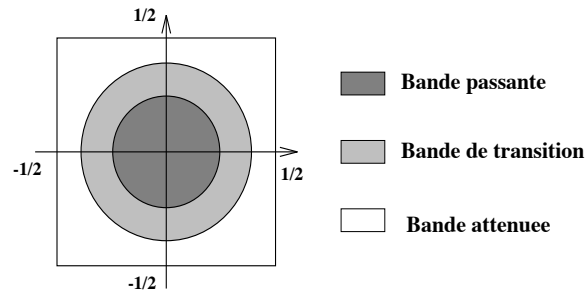


Filtre passe-bande

Filtre coupe-bande

V-3

Principe de la synthèse des filtres RIF 2D



Gabarit passe-bas

- Objectif : approcher le filtre prototype souhaité H par un filtre réalisable \hat{H} .
- Norme d'erreur d'approximation (L_∞) :

$$\epsilon_\infty = \sup_{\nu_1, \nu_2} |H(\nu_1, \nu_2) - \hat{H}(\nu_1, \nu_2)|$$

- Filtre “optimal” : filtre réalisable \hat{H} qui minimise cette erreur.

Le cahier des charges peut s'exprimer :

- dans le domaine spatial sous forme d'une réponse impulsionnelle ;
- dans le domaine fréquentiel sous forme du gabarit de la réponse en fréquence \hat{H} .

V-3

Synthèse par utilisation de fenêtres

Le cahier des charges est une réponse en fréquence $H(\nu_1, \nu_2)$. On cherche à l'approcher par un filtre RIF réalisable dont la réponse impulsionnelle est de taille finie $N \times N$. Comme $H(\nu_1, \nu_2)$ est spécifié, il n'y a aucune raison pour que sa réponse impulsionnelle soit de taille finie $N \times N$. La méthode consiste donc à tronquer la réponse impulsionnelle $h(n_1, n_2)$ de H par une fenêtre 2-D $w(n_1, n_2)$.

- Réponse impulsionnelle du filtre réalisable :

$$\hat{h}(n_1, n_2) = w(n_1, n_2) \cdot h(n_1, n_2)$$

Réponse en fréquence :

$$\begin{aligned} \hat{H}(\nu_1, \nu_2) &= W(\nu_1, \nu_2) * H(\nu_1, \nu_2) \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} W(\alpha, \beta) H(\nu_1 - \alpha, \nu_2 - \beta) d\alpha d\beta \end{aligned}$$

- Une bonne fenêtre de troncature est une fenêtre dont la T.F. $W(\nu_1, \nu_2)$ possède :
 - ▷ un lobe principal étroit ;
 - ▷ des lobes secondaires faibles.

V-3

Synthèse par utilisation de fenêtres

- Fenêtres séparables :

$$w_{2D}(n_1, n_2) = w_{1D}(n_1).w_{1D}(n_2)$$

- Fenêtres à symétrie circulaire :

$$w_{2D}(n_1, n_2) = w_{1D}(\sqrt{n_1^2 + n_2^2})$$

- Fenêtres 1-D ayant de bonnes propriétés : Hamming, Hanning, Bartlett, Kaiser, etc.

- ▷ Fenêtre de Hamming :

$$w_{1D}(t) = \begin{cases} 0,54 + 0,46 \cos(\pi t/\tau), & |t| < \tau \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

- ▷ Fenêtre de Kaiser :

$$w_{1D}(t) = \begin{cases} \frac{I_0(\alpha\sqrt{1-(t/\tau)^2})}{I_0(\alpha)}, & |t| < \tau \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

où $I_0(\cdot)$ est la fonction de Bessel modifiée (première espèce, ordre 0).

Cette méthode de synthèse est très facile et rapide à mettre en œuvre, mais elle conduit à des filtres sous-optimaux, qui peuvent présenter des ondulations fortes de la réponse en fréquence approchée \hat{H} , dans la bande atténuée.

V-3

Fenêtres 1D classiques

Nom	Définition de $w(k)$	1/2-largeur du lobe principal de $W(\nu)$	Niveau des lobes secondaires de $W(\nu)$
Rectangulaire	$w(k) = \begin{cases} 1 & k = 0, \dots, N-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\frac{1}{N}$	- 13 dB
Triangulaire	$w(k) = \begin{cases} 1 - \frac{ k - \frac{(N-1)}{2} }{\frac{(N-1)}{2}} & k = 0, \dots, N-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\frac{2}{N}$	- 26 dB
Hanning	$w(k) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi(k - \frac{(N-1)}{2})}{\frac{(N-1)}{2}} & k = 0, \dots, N-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\frac{2}{N}$	- 32 dB
Hamming	$w(k) = \begin{cases} 0,54 + 0,46 \cos \frac{\pi(k - \frac{(N-1)}{2})}{\frac{(N-1)}{2}} & k = 0, \dots, N-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\frac{2}{N}$	- 43 dB

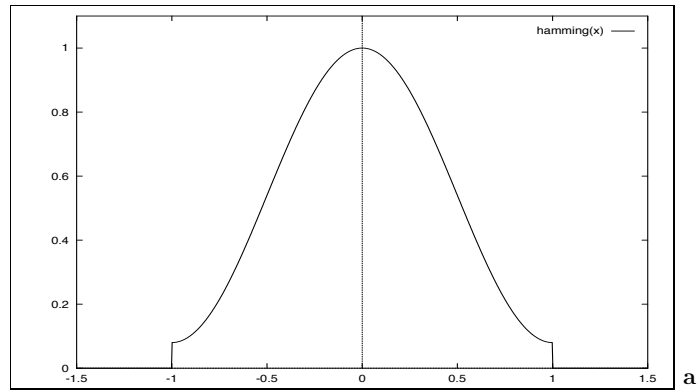
(cas discret, N impair)

Références :

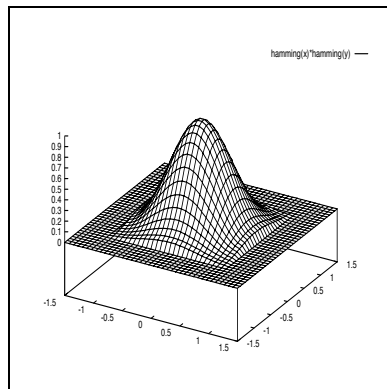
1. T.S. Duranni, "Data window for digital spectral analysis", Proc. IEEE, Vol. 119, No 3, Mars 1972.
2. F.J. Harris, "On the use of windows for harmonic analysis with the DFT", Proc. IEEE ; Vol. 66, Janv. 1978.
3. A. Nuttall, "Some windows with very good sidelobe behavior", IEEE Trans. ASSP, No 1, Fev. 1981.
4. J. Max et J.-L. Lacoume, Méthodes et techniques du traitement du signal et applications aux mesures physiques, Vol. 1, Masson, Ch. 13, 1996.

V-3

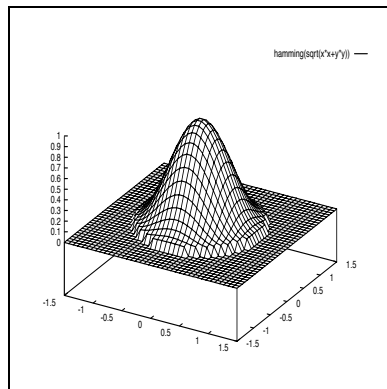
Synthèse par utilisation de fenêtres



a



b



c

a) Fenêtre de Hamming 1D b) Fenêtre de Hamming 2D séparable c) Fenêtre de Hamming 2D à symétrie circulaire

V-3

Autres méthodes de synthèse

voir [Lim90] p. 202

- Échantillonnage en fréquence (Matlab)

Les échantillons de la réponse en fréquence $\hat{H}(k_1, k_2)$ sont fixés dans la bande passante et la bande atténuée. Les échantillons de la bande de transition sont optimisés par programmation linéaire. $h(n_1, n_2) = \mathcal{TFD}^{-1}[\hat{H}(k_1, k_2)]$

- ▷ non optimal, mais bons résultats
- ▷ coût calculatoire assez important.

- Transformées en fréquence (Mc Clellan) (Matlab)

Synthèse d'un filtre RIF à deux indices à partir d'un filtre optimal à un indice. Méthode par changement de variable dans le domaine fréquentiel :

$$H(\nu_1, \nu_2) = H(\nu) \Big|_{\nu = G(\nu_1, \nu_2)}$$

- ▷ méthode très rapide ;
- ▷ filtres quasi-optimaux ;
- ▷ limitations des réponses pouvant être synthétisées.

- Algorithme d'échange de Remez à 2 indices :

On impose une réponse en fréquence H . L'algorithme d'échange permet théoriquement de trouver, de façon itérative, le filtre réalisable optimal \hat{H} qui minimise l'erreur ϵ_∞ .

- ▷ coût calculatoire très important en 2D ;
- ▷ problèmes de convergence et singularités en 2D ;
- ▷ solution non fiable.

PARTIE VI

ONDELETTES ET REPRÉSENTATIONS MULTIRÉSOLUTIONS

Notations :

$L^2(\mathbb{R})$: espaces vectoriel (de Hilbert) des signaux 1D d'énergie finie.

$L^2(\mathbb{R}^2)$: espace de Hilbert des signaux 2D d'énergie finie.

$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g^*(t)dt$ produit scalaire.

$\| f \| = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$ norme.

$f \perp g \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g^*(t)dt = 0$ décorrélation.

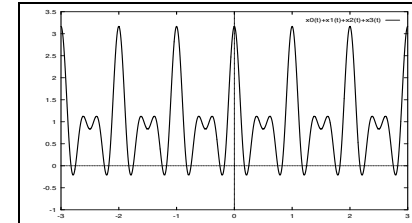
$P_V f$ projection orthogonale de f sur le sous-espace vectoriel V .

Reproduction effectuée par l'ULP avec l'autorisation du CFC 2, rue des Grands Augustins 75006 Paris.

Ouvrage reproduit : Figures extraites de : S. Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Academic Press, 1999 (18 figures).

VII-1

Limitations de la transformée de Fourier



$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j2\pi\nu t} dt = \langle f(t), \underbrace{e^{+j2\pi\nu t}}_{\text{onde stationnaire}} \rangle \quad (1)$$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu)e^{j2\pi\nu t} d\nu \quad (2)$$

• Transformée de Fourier bien adaptée à :

- ▷ l'analyse de signaux "stationnaires" (contenu fréquentiel évoluant peu au cours du temps).

• TF mal adaptée à :

- ▷ l'analyse de signaux "non stationnaires" :
- ▷ transitoires : Dirac, etc. (contours)
- ▷ signaux permanents dont le contenu fréquentiel évolue au cours du temps (signal modulé en fréquence, etc.)

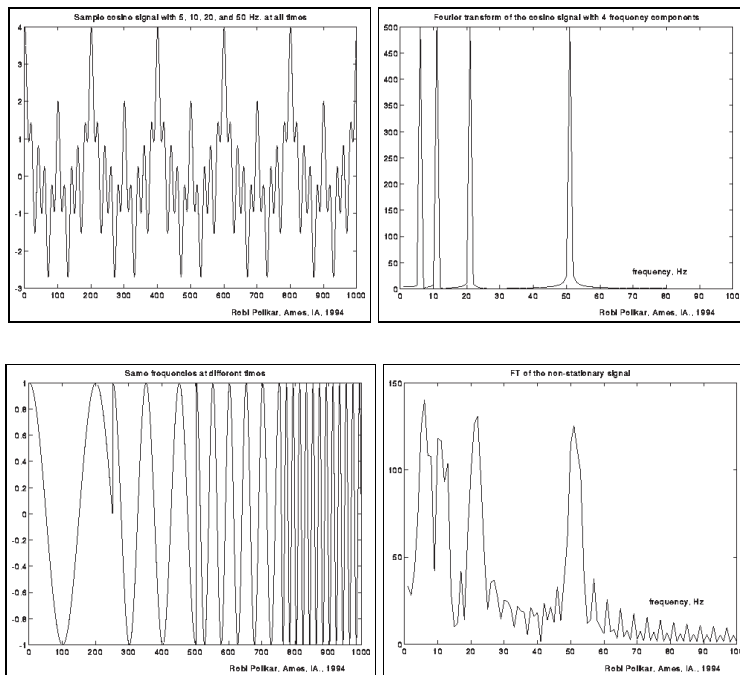
• Pourquoi ?

- ▷ (??) décompose le signal sur des bases d'ondes sinusoïdales stationnaires ;
- ▷ (??) mesure la corrélation (ressemblance) entre le signal à analyser et une onde stationnaire.
- ▷ La TF ne donne pas d'information sur la localisation temporelle de l'énergie dans le signal.

⇒ Représentations « temps-fréquence » : transformée de Fourier à court terme, transformée de Wigner-Ville. Représentations temps-échelle : transformée en ondelettes

VII-1

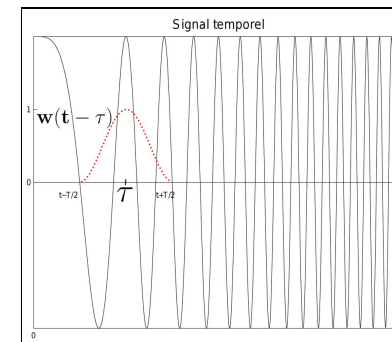
Limitations de la transformée de Fourier



VII-2

Transformée de Fourier à court terme

ou transformée de Gabor (1946) ...



- Troncature du signal étudié par une fenêtre w de durée fixe T centrée au point τ d'analyse :

$$w(t - \tau) = 0 \text{ pour } t \notin [\tau - \frac{T}{2}, \tau + \frac{T}{2}]$$

- Calcul de la TF du signal tronqué = Transf. Gabor

$$G_f(\nu, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) w(t - \tau) e^{-j2\pi\nu t} dt$$

$$= \langle f(t), \underbrace{w(t - \tau) e^{+j2\pi\nu t}}_{\text{atome temps-fréquence de Gabor = "sinusoïde" tronquée}} \rangle$$

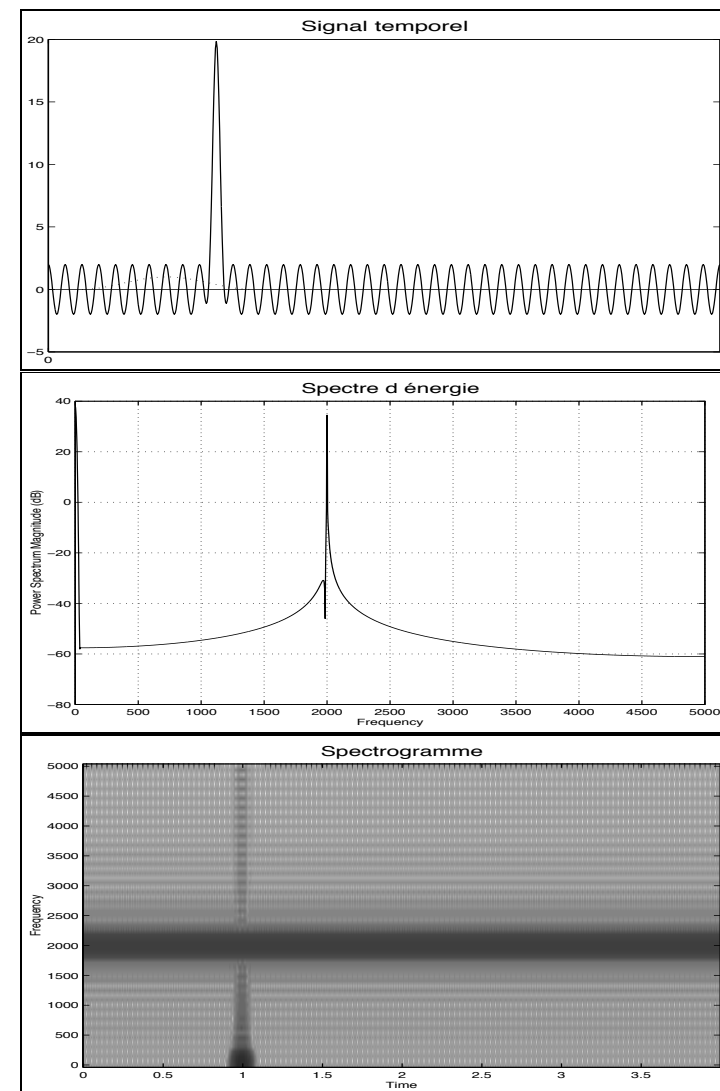
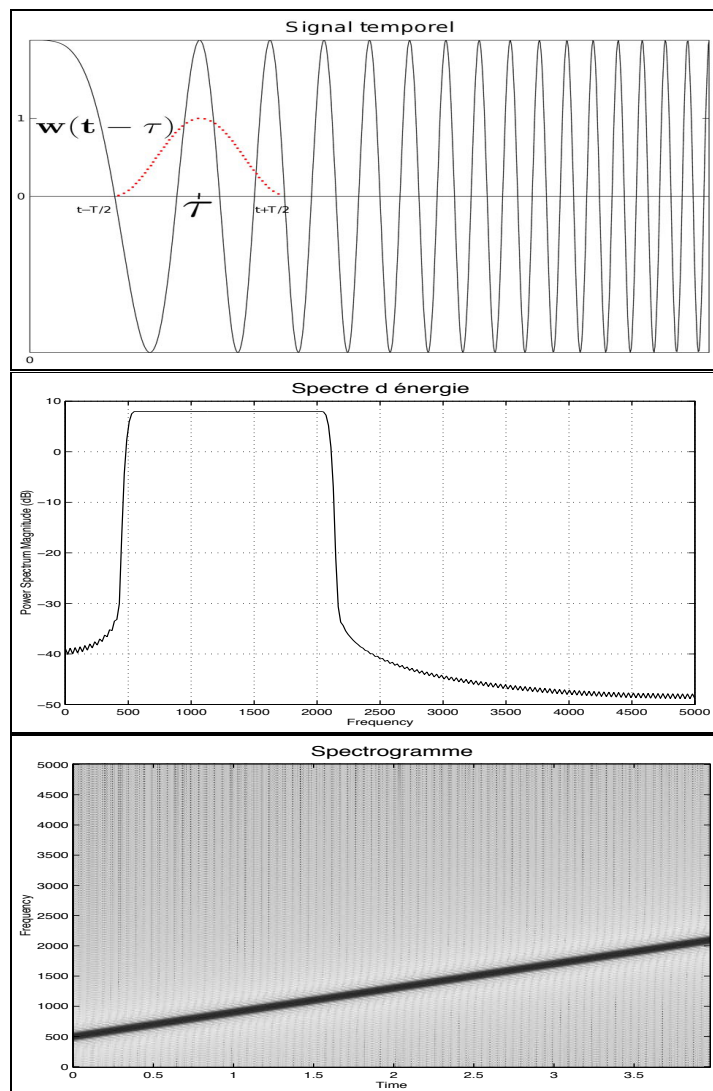
- Transformée de Gabor inverse :

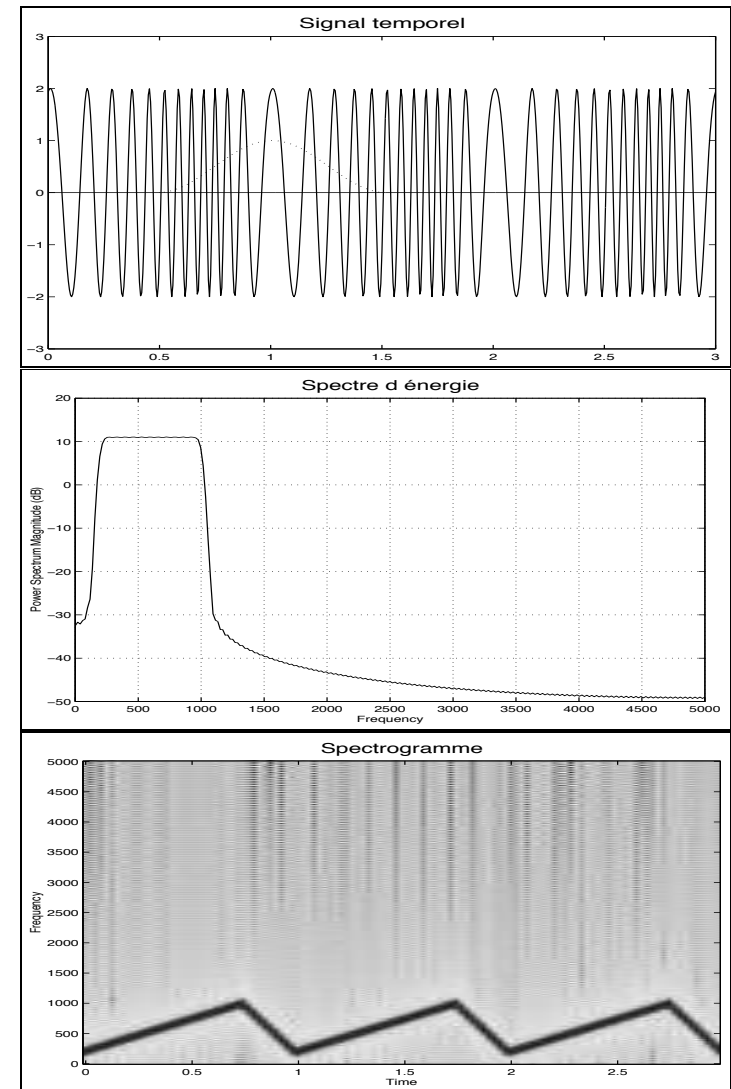
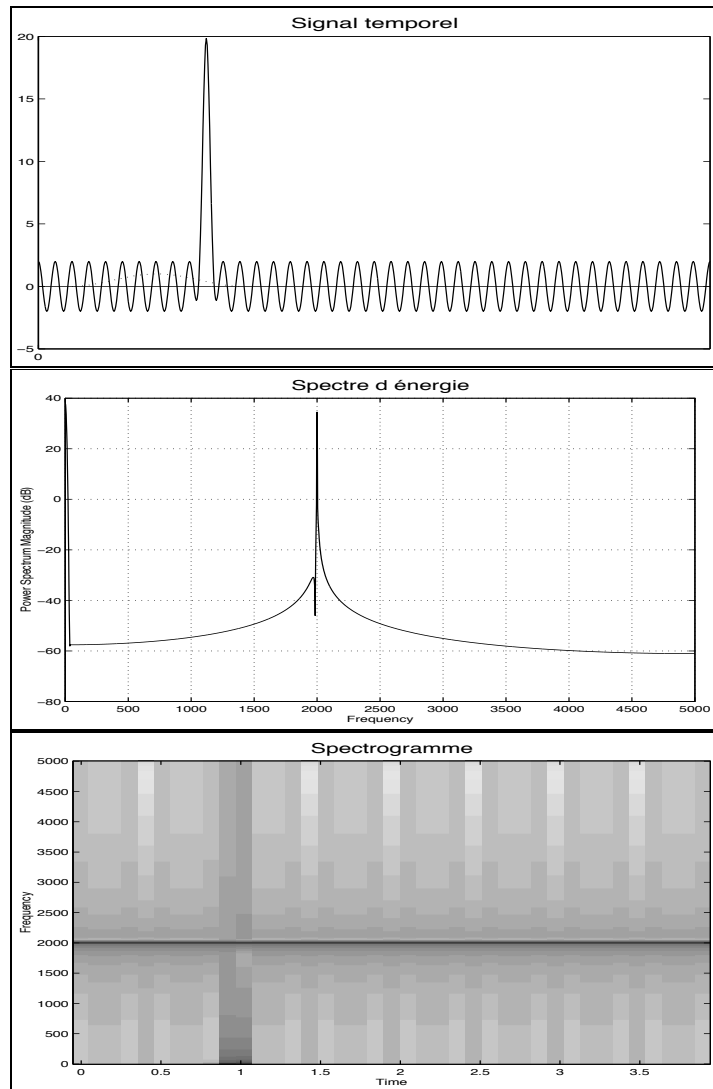
$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G_f(\nu, \tau) w(\tau - t) e^{j2\pi\nu t} d\tau d\nu$$

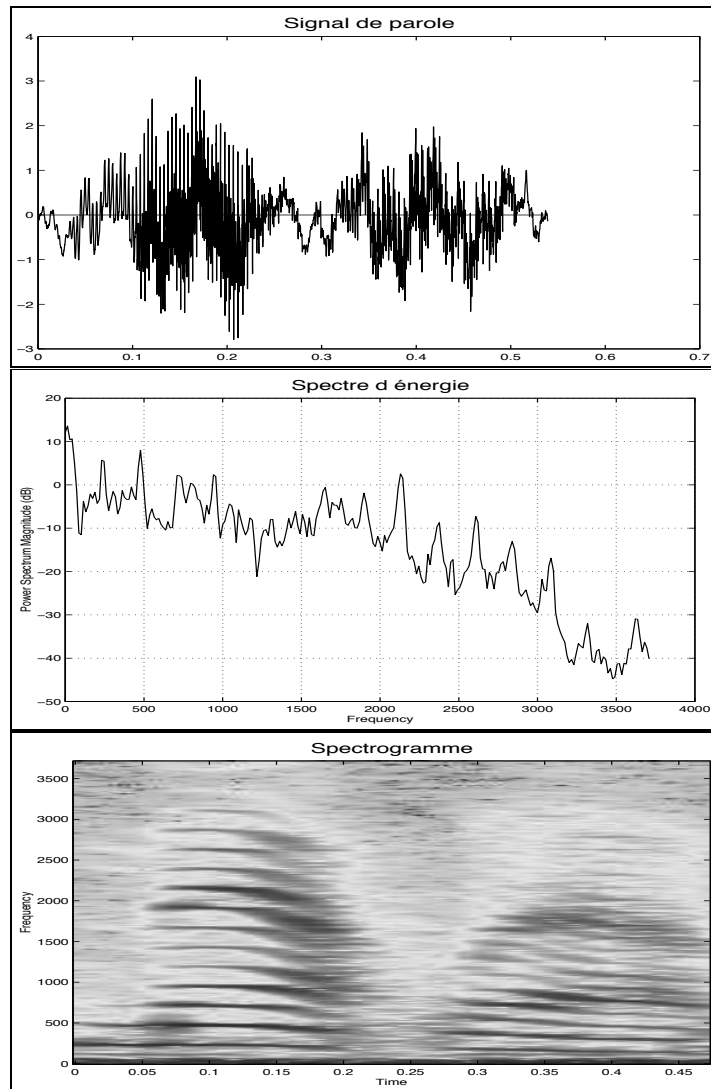
- Spectrogramme : $|G_f(\nu, \tau)|^2$

- Inconvénients :

- ▷ fenêtre d'analyse de largeur fixe ;
- ▷ localisation temps-fréquence figée.

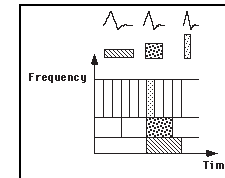






VI-3

Transformée en ondelettes continue (réelle)



Une ondelette est une fonction Ψ de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$, $\|\Psi\| = 1$, vérifiant : $C_\Psi = \int_0^{+\infty} \frac{|\mathcal{F}[\Psi](\nu)|^2}{\nu} d\nu < \infty$. ($\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(t) dt = 0$).

Soit $f(t) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$

• Transformée en ondelettes réelle :

$$\begin{aligned} W_f(s, \tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \Psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right) dt \\ &= \underbrace{\left\langle f(t), \frac{1}{\sqrt{s}} \Psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right) \right\rangle}_{\text{ondelette}} \\ &\quad \text{filtrage passe-bande} \end{aligned}$$

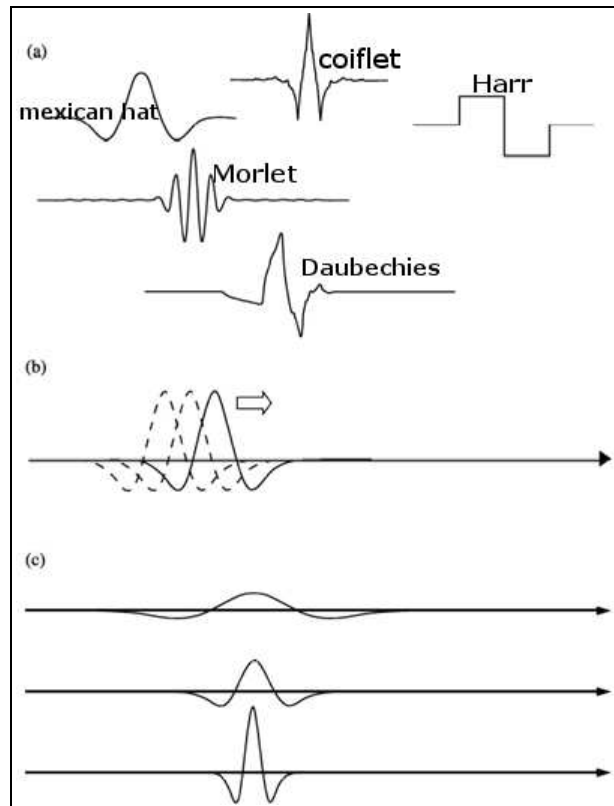
$s \in \mathbb{R}^+$: paramètre d'échelle ,
 $\frac{1}{s} \in \mathbb{R}^+$: paramètre de résolution (ou de « fréquence »), $\tau \in \mathbb{R}$.

• Transformée inverse :

$$f(t) = \frac{1}{C_\Psi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} W_f(s, \tau) \frac{1}{\sqrt{s}} \Psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right) d\tau \frac{ds}{s^2}$$

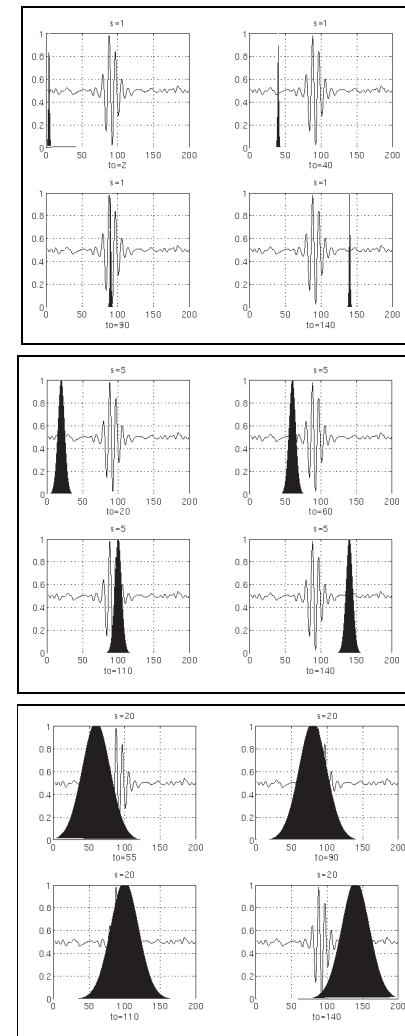
• Propriétés :

- ▷ Utilisation : représentations multirésolutions, compression, détection de transitions.
- ▷ Largeur de l'ondelette variable selon s :
 - * s petit : petites échelles, grandes résolutions, hautes fréquences, ondelette étroite ;
 - * s grand : grandes échelles, faibles résolutions, basses fréquences, ondelette large.
- ▷ Pavage temps-fréquence variable, de surface Cte.



Exemples d'ondelettes : a) chapeau mexicain, ondelettes de Morlet, coiflet, Daubechies, Harr. b) translation temporelle c) contraction - dilatation

Gustavo A. Alonso, Juan Manuel Gutiérrez, Jean-Louis Marty and Roberto Muñoz (2011). Implementation of the Discrete Wavelet Transform Used in the Calibration of the Enzymatic Biosensors, Discrete Wavelet Transforms - Biomedical Applications, Prof. Hannu Olkkonen (Ed.), ISBN: 978-953-307-654-6, InTech



© Roby Polikar, Ames, Iowa.

<http://www.public.iastate.edu/~rpolikar/WAVELETS/WTtutorial.html>

A Wavelet Tour of Signal Processing
Stéphane Mallat, Academic Press 1999 (2nd edition)

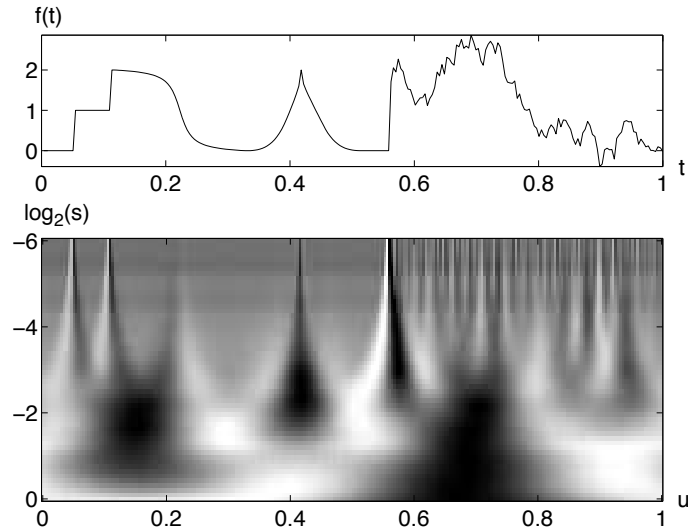
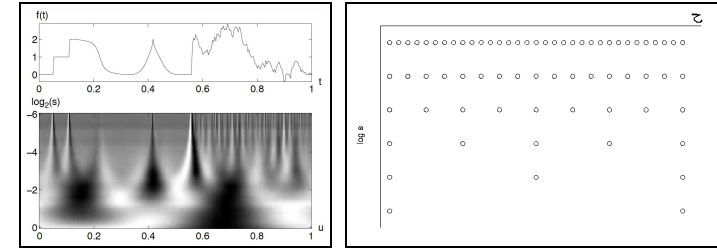


Figure 4.7: Real wavelet transform $Wf(u, s)$ computed with a Mexican hat wavelet. The vertical axis represents $\log_2 s$. Black, grey and white points correspond respectively to positive, zero and negative wavelet coefficients.

VI-4

Décomposition en série d'ondelettes



- La transformée en ondelettes continue est très redondante. Pour réduire la redondance, on échantillonne s et τ selon :

$$\begin{cases} s = \alpha^j \\ \tau = n\beta\alpha^j \end{cases} \quad (j, n) \in \mathbb{Z}^2 \quad \Rightarrow \quad W_f^d(j, n) = W_f(\alpha^j, n\beta\alpha^j), \quad (j, n) \in \mathbb{Z}^2$$

Daubechies (1988) : CNS sur α, β, Ψ pour que W_f^d soit inversible. Dans le cas général : ondelettes non orthogonales, formule inverse complexe.

- Ondelettes orthogonales : Meyer (1985) démontre l'existence de bases orthonormales de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ pour $s = 2^j, \tau = n2^j$:

$$\begin{aligned} W_f^d(j, n) = W_f(2^j, n2^j) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{2^j}} \Psi\left(\frac{t-2^j n}{2^j}\right) dt \\ &= \left\langle f(t), \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2^j}} \Psi\left(\frac{t-2^j n}{2^j}\right)}_{\text{ondelette orthogonale}} \right\rangle \end{aligned}$$

$$f(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \underbrace{\left\langle f(t), \frac{1}{\sqrt{2^j}} \Psi\left(\frac{t-2^j n}{2^j}\right) \right\rangle}_{W_f^d(j, n)} \frac{1}{\sqrt{2^j}} \Psi\left(\frac{t-2^j n}{2^j}\right)$$

décomposition en série d'ondelettes

$$\Rightarrow \left\{ \frac{1}{\sqrt{2^j}} \Psi\left(\frac{t-2^j n}{2^j}\right), (j, n) \in \mathbb{Z}^2 \right\} \text{ forment une base orthonormale de } \mathbb{L}^2(\mathbb{R}).$$

Les coefficients $W_f^d(j, n) = \left\langle f(t), \frac{1}{\sqrt{2^j}} \Psi\left(\frac{t-2^j n}{2^j}\right) \right\rangle$ correspondent à la transformée en ondelettes discrète.

VI-5	Approximations multirésolutions
------	---------------------------------



- Autre interprétation de la transformée en ondelettes discrète : théorie de l'approximation multirésolution des signaux de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ (Mallat 1987).
- Soit $f(t) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$,
 A_j : opérateur d'approximation des fonctions de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ à l'échelle 2^j .
 V_j le sous-espace de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ contenant les approximations à l'échelle 2^j .
- Propriétés :
 - ▷ A_j est la projection orthogonale sur $V_j : P_{V_j}$.
 - ▷ $\forall j \in \mathbb{Z}, V_{j+1} \subset V_j$.
 - ▷ $\forall j \in \mathbb{Z}, f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(\frac{t}{2}) \in V_{j+1}$.
 - ▷ $\lim_{j \rightarrow +\infty} V_j = \bigcap_{j=-\infty}^{+\infty} V_j = \{0\}$.
 - ▷ $\lim_{j \rightarrow -\infty} V_j = \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$.
 - ▷ Il existe une fonction φ telle que $\{\varphi(t-n), n \in \mathbb{Z}\}$ est une base de V_0 .

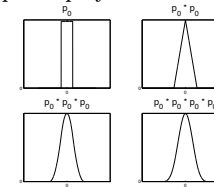
VI-5	Approximations multirésolutions
------	---------------------------------



Exemples d'approximations multirésolutions

- Approximation par des fonctions constantes par morceaux (base de Haar) :
 $V_j = \{f(t) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}) | f(t) = \text{cte pour } t \in [n2^j, (n+1)2^j[, n \in \mathbb{Z}\}$. Dans ce cas :
 $\varphi(t) = \text{rect}(t - \frac{1}{2})$.

- Approximations par splines polynomiales :



- ▷ $\varphi(t) = p_0(t) = \text{rect}(t)$: base de Haar
- ▷ $\varphi(t) = p_0(t) * p_0(t)$: approx. linéaire par morceaux ;
- ▷ $\varphi(t) = p_0(t) * p_0(t) * p_0(t)$: quadratique,
- ▷ $\varphi(t) = p_0(t) * p_0(t) * p_0(t) * p_0(t)$: spline cubique.

- Approximation de Shannon :

$V_j = \{f(t) \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}) | F(\nu) \text{ a pour support } [-2^{-j}, 2^{-j}]\}$. Dans ce cas : $\varphi(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$.



Approximations multirésolutions de Haar

(Pan et Syrinx par Boucher, 1759, National Gallery, Londres).
 © C. Chaplais pour le traitement.
http://cas.ensmp.fr/~chaplais/Wavetour_presentation/

VI-5	Approximations multirésolutions
------	---------------------------------



Fonctions d'échelles

$$\dots \subset V_{j+1} \subset V_j \subset V_{j-1} \subset \dots$$

L'approximation d'une fonction $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ à l'échelle 2^j est la projection orthogonale P_{V_j} sur V_j .

Par orthogonalisation des fonctions de base $\{\varphi(t-n), n \in \mathbb{Z}\}$, on construit une base orthonormale de $V_0 : \{\Phi(t-n), n \in \mathbb{Z}\}$.

$\Phi(t)$: fonction d'échelle. $\{\frac{1}{\sqrt{2^j}}\Phi(\frac{t-2^jn}{2^j}), n \in \mathbb{Z}\}$ forme une base orthonormale de $V_j, j \in \mathbb{Z}$:

$$P_{V_j}f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \underbrace{\langle f(t), \frac{1}{\sqrt{2^j}}\Phi(\frac{t-2^jn}{2^j}) \rangle}_{a_j[n]} \frac{1}{\sqrt{2^j}}\Phi(\frac{t-2^jn}{2^j})$$

$a_j[n]$: approximation *discrète* du signal f à l'échelle 2^j .

$$\begin{aligned} a_j[n] &= \langle f(t), \frac{1}{\sqrt{2^j}}\Phi(\frac{t-2^jn}{2^j}) \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{2^j}}\Phi(\frac{t-2^jn}{2^j}) dt \\ &= \underbrace{f(t) * \frac{1}{\sqrt{2^j}}\Phi(-2^{-j}t)}_{\text{filtrage passe-bas}} \Big|_{t = 2^jn} \underbrace{\quad}_{\text{échantillonnage}} \end{aligned}$$

A Wavelet Tour of Signal Processing
Stéphane Mallat, Academic Press 1999 (2nd edition)

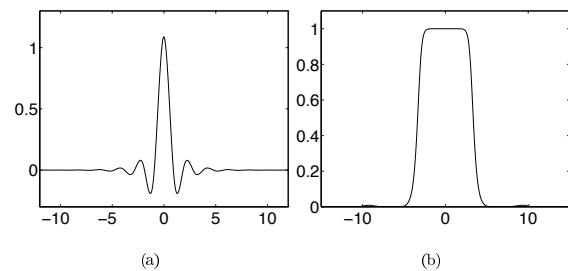


Figure 7.2: (a) Cubic spline scaling function ϕ and (b) its Fourier transform $\hat{\phi}$.

A Wavelet Tour of Signal Processing
Stéphane Mallat, Academic Press 1999 (2nd edition)

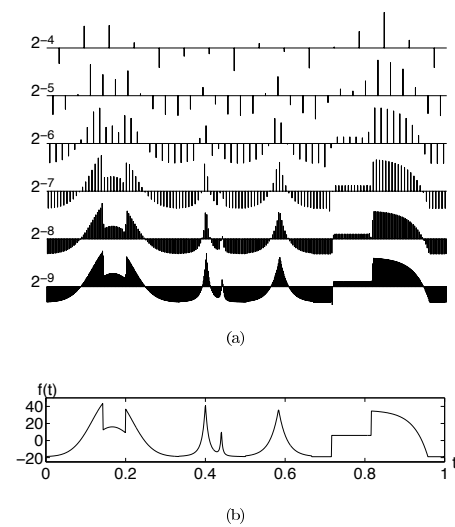


Figure 7.3: Discrete multiresolution approximations $a_j[n]$ at scales 2^j , computed with cubic splines.

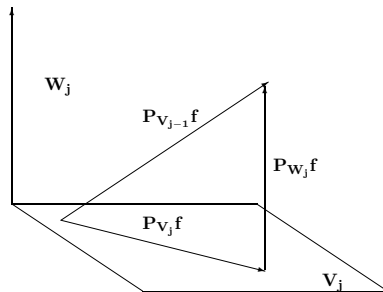
VI-5	Approximations multirésolutions
------	---------------------------------



Où l'on voit reparaître les ondelettes...

$$\dots \subset V_{j+1} \subset V_j \subset V_{j-1} \subset \dots$$

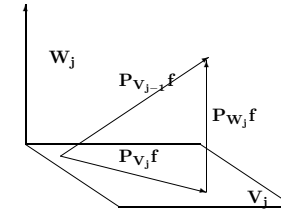
V_j est l'espace des approximations de f à l'échelle 2^j .



Soit W_j le complément orthogonal de V_j dans V_{j-1} :

$$\begin{aligned} V_{j-1} &= V_j \oplus W_j \\ P_{V_{j-1}}f &= P_{V_j}f + P_{W_j}f \end{aligned}$$

W_j s'interprète comme l'espace des détails présents à l'échelle 2^{j-1} qui disparaissent à l'échelle plus grossière 2^j .



$\exists \Psi(t)$ (ondelette orthogonale) telle que : $\{\frac{1}{\sqrt{2^j}}\Psi(\frac{t-2^jn}{2^j}), n \in \mathbb{Z}\}$ forme une base orthonormale de $W_j, j \in \mathbb{Z}$:

$$P_{W_j}f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \underbrace{\langle f(t), \frac{1}{\sqrt{2^j}}\Psi(\frac{t-2^jn}{2^j}) \rangle}_{d_j[n]} \frac{1}{\sqrt{2^j}}\Psi(\frac{t-2^jn}{2^j})$$

$d_j[n]$: signal de détail *discret* du signal f à l'échelle 2^j (transformée en ondelettes discrète).

$$\begin{aligned} d_j[n] &= \langle f(t), \frac{1}{\sqrt{2^j}}\Psi(\frac{t-2^jn}{2^j}) \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{2^j}}\Psi(\frac{t-2^jn}{2^j}) dt \\ &= \underbrace{f(t) * \frac{1}{\sqrt{2^j}}\Psi(-2^{-j}t)}_{\text{filtrage passe-bande}} \Big|_{t = 2^jn} \underbrace{\quad}_{\text{échantillonnage}} \end{aligned}$$

Base orthogonale de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$:

$$\bigoplus_{j=-\infty}^{+\infty} W_j = \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$$

$$f(t) = \underbrace{\sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f(t), \frac{1}{\sqrt{2^j}}\Psi(\frac{t-2^jn}{2^j}) \rangle \frac{1}{\sqrt{2^j}}\Psi(\frac{t-2^jn}{2^j})}_{\text{décomposition en série d'ondelettes}}$$

A Wavelet Tour of Signal Processing
Stéphane Mallat, Academic Press 1999 (2nd edition)

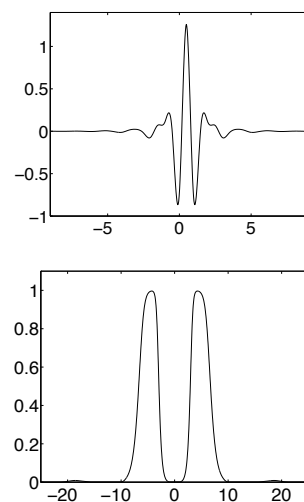


Figure 7.5: Battle-Lemarié cubic spline wavelet ψ and its Fourier transform modulus.

A Wavelet Tour of Signal Processing
Stéphane Mallat, Academic Press 1999 (2nd edition)

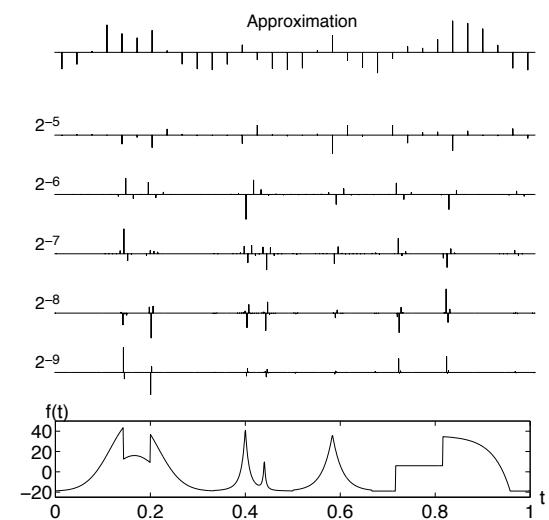
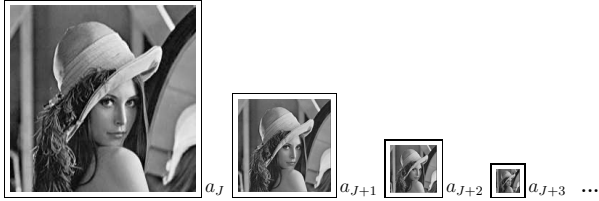


Figure 7.7: Wavelet coefficients $d_J[n] = \langle f, \psi_{J,n} \rangle$ calculated at scales 2^j with the cubic spline wavelet. At the top is the remaining coarse signal approximation $a_J[n] = \langle f, \phi_{J,n} \rangle$ for $J = -5$.



Transformée en ondelettes discrète (TOD) rapide

Signal discret = approximation discrète $a_J[n]$ du signal continu à une échelle 2^J .

Le TOD permet de calculer les signaux d'approximation $a_j[n]$ et les signaux de détail $d_j[n]$ aux échelles $j > J$.

- Filtres miroirs en quadrature (QMF)

$$h[n] = \langle \frac{1}{\sqrt{2}}\Phi(\frac{t}{2}), \Phi(t-n) \rangle$$

$$g[n] = \langle \frac{1}{\sqrt{2}}\Psi(\frac{t}{2}), \Phi(t-n) \rangle = (-1)^{1-n} h[1-n]$$

- Relation entre Φ et Ψ :

$$\mathcal{F}[\Psi](\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{F}[g](\frac{\omega}{2})\mathcal{F}[\Phi](\frac{\omega}{2})$$

- Algorithme pyramidal rapide (Mallat-87) = filtrage sous-bande

▷ Décomposition en ondelettes discrètes :

$$a_{j+1}[p] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n-2p] a_j[n] = (a_j * \bar{h})[2p]$$

$$d_{j+1}[p] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g[n-2p] a_j[n] = (a_j * \bar{g})[2p]$$

▷ Reconstruction :

$$\begin{aligned} a_j[p] &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[p-2n] a_{j+1}[n] + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g[p-2n] d_{j+1}[n] \\ &= (\bar{a}_{j+1} * h)[p] + (\bar{d}_{j+1} * g)[p] \end{aligned}$$

$$\text{avec : } \bar{x}[n] = x[-n] \text{ et : } \hat{x}[n] = \begin{cases} x[p] & \text{si } n = 2p \\ 0 & \text{si } n = 2p+1 \end{cases}$$

A Wavelet Tour of Signal Processing
Stéphane Mallat, Academic Press 1999 (2nd edition)

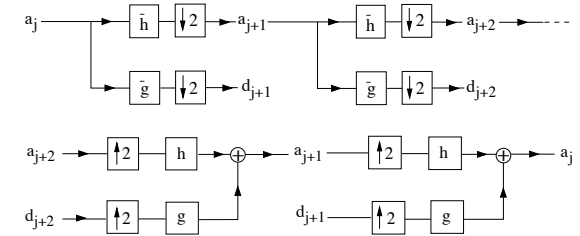


Figure 7.12: (a): A fast wavelet transform is computed with a cascade of filterings with \bar{h} and \bar{g} followed by a factor 2 subsampling. (b): A fast inverse wavelet transform reconstructs progressively each a_j by inserting zeroes between samples of a_{j+1} and d_{j+1} , filtering and adding the output.



Cas des images

Bases d'ondelettes séparables de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2)$:

$$\dots \subset V_{j+1}^2 \subset V_j^2 \subset V_{j-1}^2 \subset \dots$$

$$V_{j-1}^2 = V_j^2 \oplus W_j^2$$

$$\bigoplus_{j=-\infty}^{+\infty} W_j^2 = \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2)$$

Soit $\Phi(\cdot)$ une fonction d'échelle 1D et $\Psi(\cdot)$ l'ondelette 1D correspondante, qui engendre une base orthonormale de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$. On définit :

$$\begin{aligned}\Phi(x, y) &= \Phi(x)\Phi(y) \\ \Psi^1(x, y) &= \Phi(x)\Psi(y) \\ \Psi^2(x, y) &= \Psi(x)\Phi(y) \\ \Psi^3(x, y) &= \Psi(x)\Psi(y)\end{aligned}$$

$$\Phi_{j,n,m}(x, y) = \frac{1}{2^j} \Phi\left(\frac{x - 2^j n}{2^j}, \frac{y - 2^j m}{2^j}\right) \quad k = 1, 2, 3.$$

$$\Psi_{j,n,m}^k(x, y) = \frac{1}{2^j} \Psi^k\left(\frac{x - 2^j n}{2^j}, \frac{y - 2^j m}{2^j}\right) \quad k = 1, 2, 3.$$

La famille de fonctions d'échelles :

$\{\Phi_{j,n,m}(x, y)\}_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2}$ est une b.o.n. de V_j^2 .

La famille d'ondelettes :

$\{\Psi_{j,n,m}^1(x, y), \Psi_{j,n,m}^2(x, y), \Psi_{j,n,m}^3(x, y)\}_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2}$ est une b.o.n. de W_j^2 .

$\{\Psi_{j,n,m}^1(x, y), \Psi_{j,n,m}^2(x, y), \Psi_{j,n,m}^3(x, y)\}_{(j,n,m) \in \mathbb{Z}^3}$ est une b.o.n. de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^2)$.

A Wavelet Tour of Signal Processing
Stéphane Mallat, Academic Press 1999 (2nd edition)

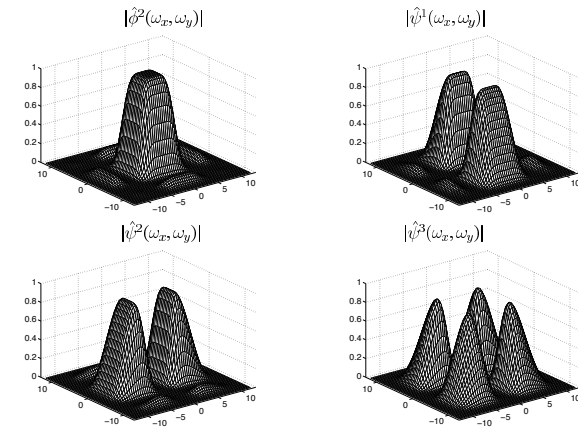


Figure 7.24: Fourier transforms of a separable scaling function and of 3 separable wavelets calculated from a one-dimensional Daubechies 4 wavelet.

A Wavelet Tour of Signal Processing
Stéphane Mallat, Academic Press 1999 (2nd edition)

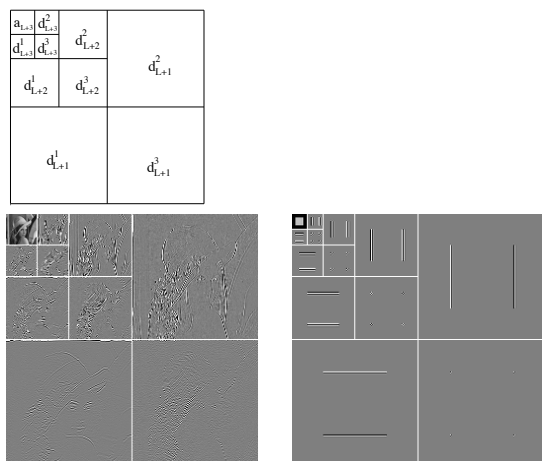


Figure 7.26: Separable wavelet transforms of Lena and of a white square in a black background, decomposed respectively on 3 and 4 octaves. Black, grey and white pixels correspond respectively to positive, zero and negative wavelet coefficients. The disposition of wavelet image coefficients $d_j^k[n, m] = \langle f, \psi_{j,n}^k \rangle$ is illustrated at the top.

A Wavelet Tour of Signal Processing
Stéphane Mallat, Academic Press 1999 (2nd edition)

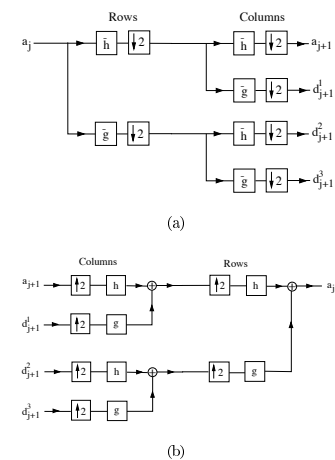
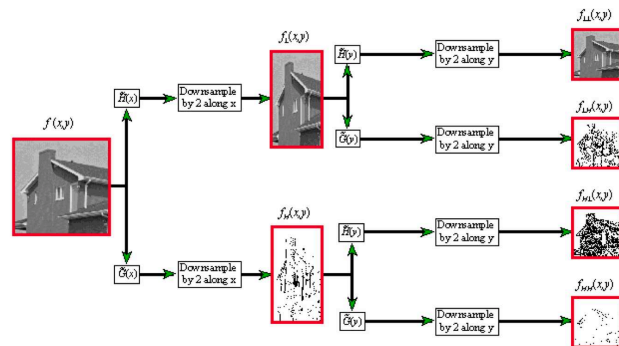
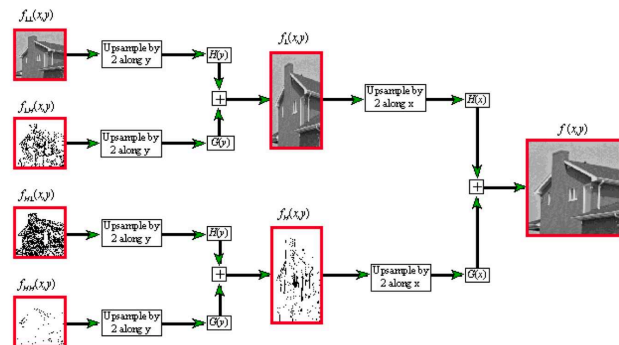


Figure 7.27: (a): Decomposition of a_j with 6 groups of one-dimensional convolutions and subsamplings along the image rows and columns. (b): Re-construction of a_j by inserting zeros between the rows and columns of a_{j+1} and d_{j+1}^k , and filtering the output.



Décomposition en ondelettes (algorithme pyramidal de Mallat)



Reconstruction (algorithme pyramidal de Mallat)

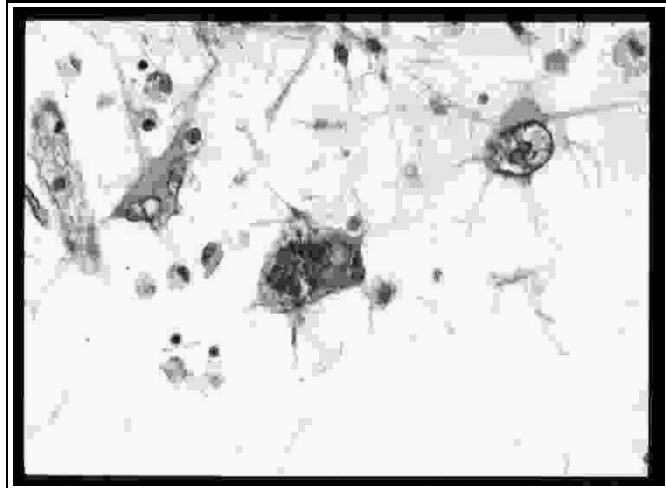
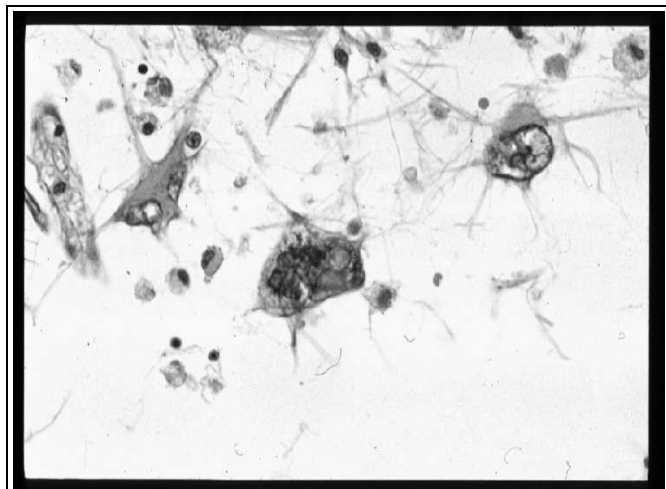
Source : I3S
http://www.irisa.fr/temics/Accord/CDROM/i3s/decomp_dyad/intro.html

VI-6

Applications

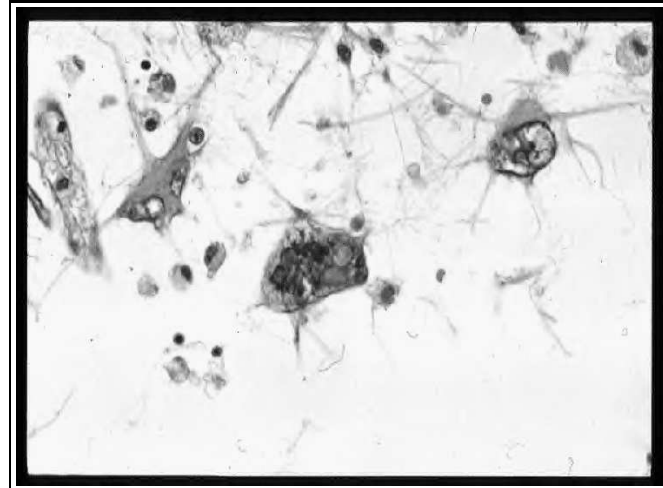
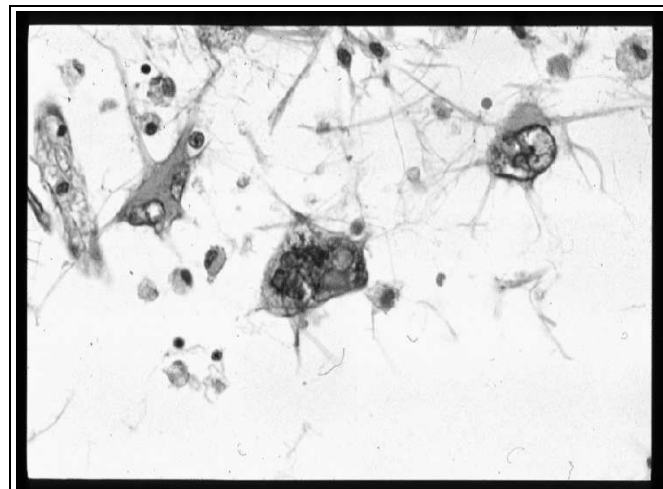


- Compression des signaux et des images : JPEG2000.
<http://dit-archives.epfl.ch/FI01/fi-3-1/3-1-page1.html>
- Echantillonnage et interpolation
<http://bigwww.epfl.ch/publications/unser0001.html>
- Estimation de signaux et d'images bruitées, restauration.
<http://www.cmap.polytechnique.fr/~kalifa/restordec.html>
- Détection de contours
<http://www.mathworks.fr/fr/help/wavelet/examples/detecting-discontinuities-and-breakdown-points.html>
- Analyse des fractales et multifractales (processus auto-similaires).
- Analyse des turbulences.
- Estimation spectrale.
- Modèles déformables (contours, surfaces, volumes).
- Modèles graphiques et synthèse d'images
- Analyse numérique, etc.



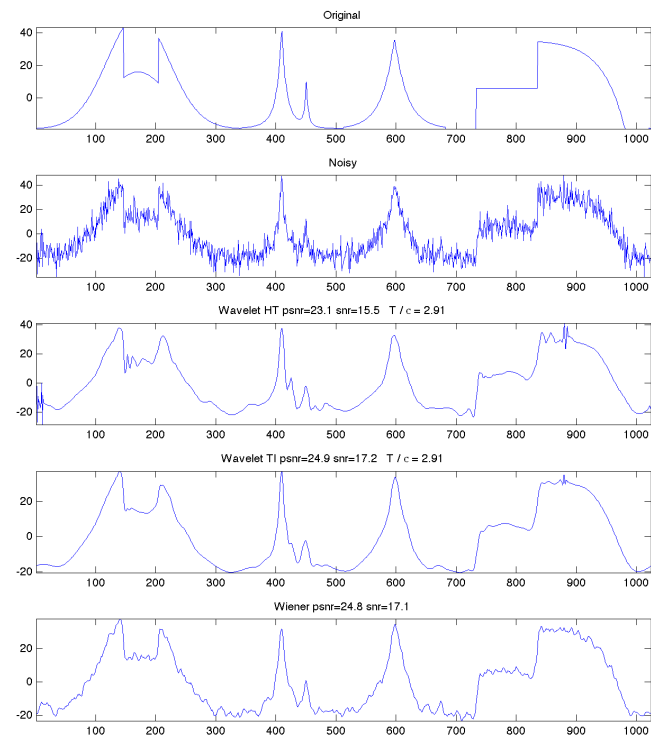
Pathologie II (image originale, compression JPEG 120:1)

© Roman Markowski and Geoffrey Fox. HPDC95.
<http://www.npac.syr.edu/users/gcf/hpdc95compress/fullindex.html#local28>



Pathologie II (image originale, compression ondelettes 120:1)

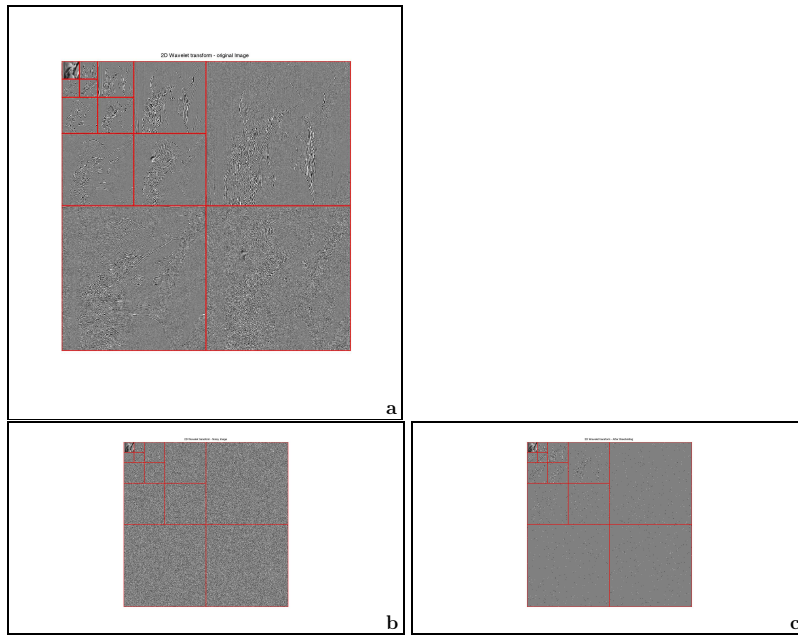
© Roman Markowski and Geoffrey Fox. HPDC95.
<http://www.npac.syr.edu/users/gcf/hpdc95compress/fullindex.html#local28>



Débruitage d'un signal 1D par seuillage des coefficients d'ondelettes



Débruitage d'une image par seuillage des coefficients d'ondelettes : (a) image originale. (b) image bruitée. (c) débruitage par ondelettes. (d) filtrage de Wiener.



Débruitage d'une image par seuillage des coefficients d'ondelettes : (a) transformée en ondelettes (TO) de l'image originale. (b) TO de l'image bruitée. (c) TO seuillée.

A Wavelet Tour of Signal Processing

Stéphane Mallat, Academic Press 1999 (2nd edition)

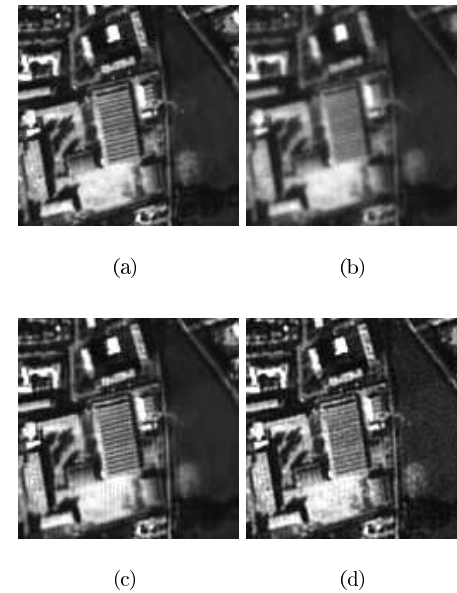
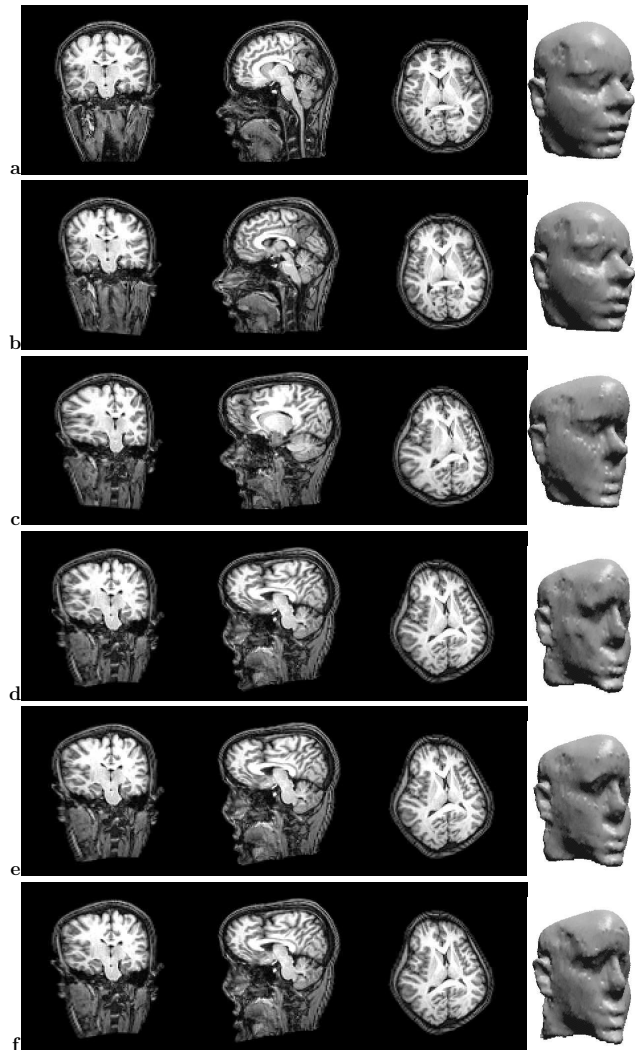


Figure 10.14: (a): Original airplane image. (b): Simulation of a satellite image provided by the CNES (SNR = 31.1db). (c): Deconvolution with a translation invariant thresholding in a mirror wavelet basis (SNR = 34.1db). (d): Deconvolution calculated with a circular convolution, which yields a nearly minimax risk for bounded variation images (SNR = 32.7db).



Recalage 3D interpatients : approximations multirésolutions d'un champ de déformations entre images (a) Image source, (f) image cible (a). Les résultats du recalage de (a) sur (f) sont : (b) après recalage affine ; après recalage déformable (c) à l'échelle $s = 2^3$, (d) à l'échelle $s = 2^2$ et (e) à l'échelle $s = 2^1$. © O. Musse, C. Heinrich, F. Heitz, CNRS - 2000.

VI-6	Bibliographie et sites
------	------------------------



• Sites internet

<https://www.ceremade.dauphine.fr/~peyre/wavelet-tour/>
A wavelet tour of signal processing. 3rd ed. Stéphane Mallat

<https://www.ceremade.dauphine.fr/~peyre/numerical-tour/tours/#wavelet>
<https://www.ceremade.dauphine.fr/~peyre/numerical-tour/tours/#denoisingwav>
Numerical Tour - Gabriel Peyre : Wavelets

http://cas.ensmp.fr/~chaplais/Wavetour_presentation/
Wavelet Tour of Signal Processing : presentation

<http://users.rowan.edu/~polikar/WAVELETS/WTtutorial.html>
The wavelet tutorial

<http://www.wavelet.org>
Wavelet Digest (Lucent)

• Livres

S. Mallat, Wavelet tour of signal processing. Academic Press, 3rd ed., 2008

M. Vetterli, Wavelets and subband coding. Prentice Hall, 1995

P. Flandrin, Temps-fréquence. Hermes, 1998